

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

24.5 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - x^4 - \sin x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $h'(x) = f'(x) - 4x^3 + \eta\mu x$ (1)

Παρατηρούμε ότι $h(0) = f(0) - 0^4 - \sin 0 + 1 \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} h(0) = 0$. Οπότε ισχύει

$f(x) \geq x^4 + \sin x - 1 \Rightarrow f(x) - x^4 - \sin x + 1 \geq 0 \stackrel{\substack{h(x)=f(x)-x^4-\sin x+1 \\ h(0)=0}}{\Rightarrow} h(x) \geq h(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η συνάρτηση h έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $\boxed{h'(0)=0} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f'(0) - 4 \cdot 0^3 + \eta\mu 0 = 0 \Rightarrow \boxed{f'(0)=0}$

24.5 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - 2x^2 - \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $h'(x) = f'(x) - 4x + \frac{2x}{x^2 + 1}$ (1)

Παρατηρούμε ότι $h(0) = f(0) - 2 \cdot 0^2 - \ln(0^2 + 1) \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} h(0) = 0$. Οπότε ισχύει

$f(x) \geq 2x^2 + \ln(x^2 + 1) \Rightarrow f(x) - 2x^2 - \ln(x^2 + 1) \geq 0 \stackrel{\substack{h(x)=f(x)-2x^2-\ln(x^2+1) \\ h(0)=0}}{\Rightarrow} h(x) \geq h(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η συνάρτηση h έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$\boxed{h'(0)=0} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f'(0) - 4 \cdot 0 + \frac{2 \cdot 0}{0^2 + 1} = 0 \Rightarrow \boxed{f'(0)=0}$$

24.5 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = (e^x + 1) \cdot f(x) + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $h'(x) = e^x f(x) + (e^x + 1)f'(x) + \frac{2x}{x^2 + 1}$ (1)

Παρατηρούμε ότι $h(0) = (e^0 + 1) \cdot f(0) + \ln(0^2 + 1) \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} h(0) = 0$. Οπότε ισχύει

$(e^x + 1) \cdot f(x) + \ln(x^2 + 1) \leq 0 \stackrel{\substack{h(x)=(e^x+1)f(x)+\ln(x^2+1) \\ h(0)=0}}{\Rightarrow} h(x) \leq h(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η συνάρτηση h έχει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$\boxed{h'(0)=0} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} e^0 f(0) + (e^0 + 1)f'(0) + \frac{2 \cdot 0}{0^2 + 1} = 0 \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} 2f'(0) = 0 \Rightarrow \boxed{f'(0)=0}$$

24.5 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - 2x - e^{x^2-4}$, $x \in \mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $h'(x) = f'(x) - 2 - 2xe^{x^2-4}$ (1)

Παρατηρούμε ότι $h(2) = f(2) - 2 \cdot 2 - e^{2^2-4} \stackrel{f(2)=5}{\Rightarrow} h(2) = 0$. Οπότε ισχύει

$f(x) \leq 2x + e^{x^2-4} \Rightarrow f(x) - 2x - e^{x^2-4} \leq 0 \stackrel{\substack{h(x)=f(x)-2x-e^{x^2-4} \\ h(2)=0}}{\Rightarrow} h(x) \leq h(2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η συνάρτηση h έχει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 2$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$\boxed{h'(2) = 0} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f'(2) - 2 - 2 \cdot 2 \cdot e^{2^2-4} = 0 \Rightarrow f'(2) - 2 - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{f'(2) = 6}$$

24.5 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) + f(2x) + f(3x) - 4\eta\mu(3x)$, $x \in \mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $h'(x) = f'(x) + 2f'(2x) + 3f'(3x) - 12\sigma\upsilon\nu(3x)$ (1)

Παρατηρούμε ότι $h(0) = f(0) + f(0) + f(0) - 4\eta\mu 0 \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} h(0) = 0$. Οπότε ισχύει $f(x) + f(2x) + f(3x) \geq 4\eta\mu(3x) \Rightarrow f(x) + f(2x) + f(3x) - 4\eta\mu(3x) \geq 0$

$$\begin{array}{l} h(x) = f(x) + f(2x) + f(3x) - 4\eta\mu(3x) \\ h(0) = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow h(x) \geq h(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως η συνάρτηση h έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$\boxed{h'(0) = 0} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f'(0) + 2f'(0) + 3f'(0) - 12\sigma\upsilon\nu 0 = 0 \Rightarrow 6f'(0) - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{f'(0) = 2}$$

24.5 6)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \eta\mu(f(x)) - 2g(x+2)$, $x \in \mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $h'(x) = \sigma\upsilon\nu(f(x)) \cdot f'(x) - 2g'(x+2)$ (1)

Παρατηρούμε ότι $h(0) = \eta\mu(f(0)) - 2g(0+2) \stackrel{\substack{f(0)=0 \\ g(2)=-2}}{\Rightarrow} h(0) = 4$. Οπότε ισχύει

$$\begin{array}{l} h(x) = \eta\mu(f(x)) - 2g(x+2) \\ h(0) = 4 \end{array} \Rightarrow \eta\mu(f(x)) - 2g(x+2) \geq 4 \Rightarrow h(x) \geq h(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως η συνάρτηση h έχει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$\begin{aligned} \boxed{h'(0) = 0} &\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \sigma\upsilon\nu(f(0)) \cdot f'(0) - 2g'(0+2) = 0 \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} f'(0) - 2g'(2) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{f'(0) = 2g'(2)} \end{aligned}$$

24.5 7)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x^2) + x + 1 - f(x) - 2x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $h'(x) = 2xf'(x^2) + 1 - f'(x) - 4x$ (1)

Παρατηρούμε ότι $h(1) = \cancel{f(1^2)} + 1 + 1 - \cancel{f(1)} - 2 \cdot 1^2 \Rightarrow h(1) = 0$. Οπότε ισχύει

$$f(x^2) + x + 1 \geq f(x) + 2x^2 \Rightarrow f(x^2) + x + 1 - f(x) - 2x^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} h(x) = f(x^2) + x + 1 - f(x) - 2x^2 \\ h(1) = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow h(x) \geq h(1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Επομένως η συνάρτηση } h \text{ έχει ολικό ελάχιστο στο } x_0 = 1, \text{ οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει}$$

$$\boxed{h'(1) = 0} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 2 \cdot 1 \cdot f'(1^2) + 1 - f'(1) - 4 \cdot 1 = 0 \Rightarrow 2f'(1) + 1 - f'(1) - 4 \cdot 1 = 0 \Rightarrow f'(1) = 3$$

24.5 8)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(2x+1) + x^2 - f(3x-1) - x - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $h'(x) = 2f'(2x+1) + 2x - 3f'(3x-1) - 1$ (1)

Παρατηρούμε ότι $h(2) = f(2 \cdot 2 + 1) + 2^2 - f(3 \cdot 2 - 1) - 2 - 2 \Rightarrow h(2) = 0$. Οπότε ισχύει $f(2x+1) + x^2 \leq f(3x-1) + x + 2 \Rightarrow f(2x+1) + x^2 - f(3x-1) - x - 2 \leq 0 \Rightarrow$

$$\begin{matrix} h(x) = f(2x+1) + x^2 - f(3x-1) - x - 2 \\ h(2) = 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow h(x) \leq h(2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η συνάρτηση h έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 2$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$\boxed{h'(2) = 0} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 2f'(2 \cdot 2 + 1) + 2 \cdot 2 - 3f'(3 \cdot 2 - 1) - 1 = 0 \Rightarrow 2f'(5) + 4 - 3f'(5) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 - f'(5) = 0 \Rightarrow f'(5) = 3$$

24.5 9)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$h'(x) = f'(x) - e^{1-x}(-1) \Rightarrow h'(x) = f'(x) + e^{1-x} \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι $h(1) = f(1) - e^{1-1} \stackrel{f(1)=1}{\Rightarrow} h(1) = 0$. Οπότε ισχύει

$$f(x) \geq e^{1-x} \Rightarrow f(x) - e^{1-x} \geq 0 \Rightarrow \begin{matrix} h(x) = f(x) - e^{1-x} \\ h(1) = 0 \end{matrix} \Rightarrow h(x) \geq h(1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως η συνάρτηση h έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$, οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα Fermat θα ισχύει $\boxed{h'(1) = 0} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f'(1) + e^{1-1} = 0 \Rightarrow \boxed{f'(1) = -1}$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος της f στο $x_0 = 1$ είναι

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \stackrel{\begin{matrix} f(1)=1 \\ f'(1)=-1 \end{matrix}}{\Rightarrow} y - 1 = -(x - 1) \Rightarrow y - 1 = -x + 1 \Rightarrow \boxed{y = -x + 2}$$