

24.4 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^x + \beta^x + \gamma^x$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha + \beta^x \ln \beta + \gamma^x \ln \gamma$ (1)

Παρατηρούμε ότι $f(0) = \alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 \Rightarrow f(0) = 3$. Οπότε ισχύει

$\alpha^x + \beta^x + \gamma^x \geq 3 \Rightarrow f(x) \geq f(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$\boxed{f'(0) = 0} \Rightarrow \alpha^0 \ln \alpha + \beta^0 \ln \beta + \gamma^0 \ln \gamma = 0 \Rightarrow \ln \alpha + \ln \beta + \ln \gamma = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \alpha \beta \gamma = \ln 1 \Rightarrow \boxed{\alpha \beta \gamma = 1}$$

24.4 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^x + \beta^x$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha + \beta^x \ln \beta$ (1)

Παρατηρούμε ότι $f(0) = \alpha^0 + \beta^0 \Rightarrow f(0) = 2$. Οπότε ισχύει

$\alpha^x + \beta^x \geq 2 \Rightarrow f(x) \geq f(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$\boxed{f'(0) = 0} \Rightarrow \alpha^0 \ln \alpha + \beta^0 \ln \beta = 0 \Rightarrow \ln \alpha + \ln \beta = 0 \Rightarrow \ln \alpha \beta = \ln 1 \Rightarrow \boxed{\alpha \beta = 1}$$

24.4 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha - 1$ (1)

Παρατηρούμε ότι $f(0) = \alpha^0 - 0 - 1 \Rightarrow f(0) = 0$. Οπότε ισχύει

$$\alpha^x \geq x + 1 \Rightarrow \alpha^x - x - 1 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$\boxed{f'(0) = 0} \Rightarrow \alpha^0 \ln \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \ln \alpha = 1 \Rightarrow \ln \alpha = \ln e \Rightarrow \boxed{\alpha = e}$$

24.4 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \alpha \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x + x$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = \alpha \sigma \upsilon \nu x - \eta \mu x + 1$ (1)

Παρατηρούμε ότι $f(0) = \alpha \eta \mu 0 + \sigma \upsilon \nu 0 + 0 \Rightarrow f(0) = 1$. Οπότε ισχύει

$$\alpha \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x + x \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq f(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$\boxed{f'(0) = 0} \Rightarrow \alpha \sigma \upsilon \nu 0 - \eta \mu 0 + 1 = 0 \Rightarrow \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$$

24.4 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \ln x + \frac{3\alpha}{x+2} - \alpha x^2$, $x \in (0, +\infty)$. Η f είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{3\alpha}{(x+2)^2} - 2\alpha x$ (1)

Παρατηρούμε ότι $f(1) = \ln 1 + \frac{3\alpha}{1+2} - \alpha \cdot 1^2 \Rightarrow f(1) = \ln 1 + \frac{3\alpha}{3} - \alpha \Rightarrow f(1) = 0$.

Οπότε ισχύει $\ln x + \frac{3\alpha}{x+2} \geq \alpha x^2 \Rightarrow \ln x + \frac{3\alpha}{x+2} - \alpha x^2 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(1)$, για κάθε

$x \in (0, +\infty)$. Επομένως η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$\boxed{f'(1)=0} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{1}{1} - \frac{3\alpha}{(1+2)^2} - 2\alpha \cdot 1 = 0 \Rightarrow 1 - \frac{3\alpha}{3^2} - 2\alpha = 0 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{3} - 2\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 - \alpha - 6\alpha = 0 \Rightarrow -7\alpha = -3 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{7}$$

24.4 6)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = e^{\eta x} - \alpha \eta x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = e^{\eta x} \sin x - \alpha \sin x$ (1)

Παρατηρούμε ότι $f(0) = e^{\eta \cdot 0} - \alpha \eta \cdot 0 - 1 \Rightarrow f(0) = 0$.

Οπότε ισχύει $e^{\eta x} \geq \alpha \eta x + 1 \Rightarrow e^{\eta x} - \alpha \eta x - 1 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(0) = 0 \Rightarrow e^{\eta \cdot 0} \sin 0 - \alpha \sin 0 = 0 \Rightarrow 1 - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1$

24.4 7)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^2 \ln x - (\alpha + 1)x^2 + e^2$, $x \in (0, +\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με

$$f'(x) = 2\alpha x \ln x + \alpha x^2 \frac{1}{x} - 2(\alpha + 1)x \Rightarrow f'(x) = 2\alpha x \ln x + \alpha x - 2(\alpha + 1)x \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι

$$f(e) = \alpha \cdot e^2 \ln e - (\alpha + 1)e^2 + e^2 \Rightarrow f(e) = \alpha e^2 - e^2 - e^2 + e^2 \Rightarrow f(e) = 0.$$

Οπότε ισχύει $\alpha x^2 \ln x \leq (\alpha + 1)x^2 - e^2 \Rightarrow \alpha x^2 \ln x - (\alpha + 1)x^2 + e^2 \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(e)$,

για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Επομένως η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο στο $x_0 = e$,

οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$f'(e) = 0 \Rightarrow 2\alpha \cdot e \cdot \ln e + \alpha \cdot e - 2(\alpha + 1)e = 0 \Rightarrow 2\alpha e + \alpha e - 2(\alpha + 1)e = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cancel{\alpha e} + \alpha e - 2\cancel{\alpha e} - 2e = 0 \Rightarrow \alpha e = 2e \Rightarrow \alpha = 2$$

24.4 8)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \alpha_1^x + \alpha_2^x + \dots + \alpha_v^x$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = \alpha_1^x \ln \alpha_1 + \alpha_2^x \ln \alpha_2 + \dots + \alpha_v^x \ln \alpha_v$ (1)

Παρατηρούμε ότι $f(0) = \alpha_1^0 + \alpha_2^0 + \dots + \alpha_v^0 \Rightarrow f(0) = v$. Οπότε ισχύει

$$\alpha_1^x + \alpha_2^x + \dots + \alpha_v^x \geq v \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Επομένως η}$$

συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat

$$\text{θα ισχύει } \boxed{f'(0)=0} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \alpha_1^0 \ln \alpha_1 + \alpha_2^0 \ln \alpha_2 + \dots + \alpha_v^0 \ln \alpha_v = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_v) = \ln 1 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_v = 1}$$

24.4 9)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = 3\alpha^x + 5\beta^x + 7\gamma^x$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 3\alpha^x \ln \alpha + 5\beta^x \ln \beta + 7\gamma^x \ln \gamma$ (1)

Παρατηρούμε ότι $f(0) = 3\alpha^0 + 5\beta^0 + 7\gamma^0 \Rightarrow f(0) = 15$. Οπότε ισχύει

$$3\alpha^x + 5\beta^x + 7\gamma^x \geq 15 \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
 Επομένως η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat

$$\text{θα ισχύει } \boxed{f'(0)=0} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 3\alpha^0 \ln \alpha + 5\beta^0 \ln \beta + 7\gamma^0 \ln \gamma = 0 \Rightarrow 3\ln \alpha + 5\ln \beta + 7\ln \gamma = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \alpha^3 \beta^5 \gamma^7 = \ln 1 \Rightarrow \boxed{\alpha^3 \beta^5 \gamma^7 = 1}$$

24.4 10)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{4}\alpha^{x^2-4} + \beta^{\ln(x-1)} + \gamma^{x-2}$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = \frac{1}{4} \alpha^{x^2-4} \cancel{x} \ln \alpha + \beta^{\ln(x-1)} \frac{1}{x-1} \ln \beta + \gamma^{x-2} \ln \gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x \ln \alpha}{2} \alpha^{x^2-4} + \frac{\beta^{\ln(x-1)} \ln \beta}{x-1} + \gamma^{x-2} \ln \gamma \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι $f(2) = \frac{1}{4}\alpha^{4-4} + \beta^{\ln(2-1)} + \gamma^{2-2} \Rightarrow f(2) = \frac{1}{4} + 1 + 1 \Rightarrow f(2) = \frac{9}{4}$. Οπότε

$$\text{ισχύει } \frac{1}{4}\alpha^{x^2-4} + \beta^{\ln(x-1)} + \gamma^{x-2} \leq \frac{9}{4} \stackrel{f(2)=\frac{9}{4}}{\Rightarrow} f(x) \leq f(2), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 2$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$\boxed{f'(2)=0} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \cancel{x} \ln \alpha \alpha^{2^2-4} + \frac{\beta^{\ln(2-1)} \ln \beta}{2-1} + \gamma^{2-2} \ln \gamma = 0 \Rightarrow \ln \alpha + \ln \beta + \ln \gamma = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(\alpha\beta\gamma) = \ln 1 \Rightarrow \boxed{\alpha\beta\gamma = 1}$$

24.4 11)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x^a + x^b + x^c$, $x \in (0, +\infty)$. Η f είναι

παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με $f'(x) = ax^{a-1} + bx^{b-1} + cx^{c-1}$ (1)

Παρατηρούμε ότι $f(1) = 1^a + 1^b + 1^c \Rightarrow f(1) = 3$. Οπότε ισχύει

$$x^a + x^b + x^c \geq 3 \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$\boxed{f'(1)=0} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \alpha 1^{\alpha-1} + \beta 1^{\beta-1} + \gamma 1^{\gamma-1} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha + \beta + \gamma = 0}$$

24.4 12)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \ln\left(\frac{1+\alpha^x}{2}\right) - x$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι

$$\text{παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R}, \text{ με } f'(x) = \frac{1}{1+\alpha^x} \cdot \frac{\alpha^x \ln \alpha}{\cancel{2}} - 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{\alpha^x \ln \alpha}{1+\alpha^x} - 1 \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι $f(0) = \ln\left(\frac{1+\alpha^0}{2}\right) - 0 \Rightarrow f(0) = 0$. Οπότε ισχύει

$$\ln\left(\frac{1+\alpha^x}{2}\right) \geq x \Rightarrow \ln\left(\frac{1+\alpha^x}{2}\right) - x \geq 0 \Rightarrow \begin{matrix} f(x) = \ln\left(\frac{1+\alpha^x}{2}\right) - x \\ f(0) = 0 \end{matrix} \Rightarrow f(x) \geq f(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$\boxed{f'(0)=0} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{\alpha^0 \ln \alpha}{1+\alpha^0} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{\ln \alpha}{2} = 1 \Rightarrow \ln \alpha = 2 \Rightarrow \ln \alpha = \ln e^2 \Rightarrow \boxed{\alpha = e^2}$$