

24.3 1)

α) Παρατηρούμε ότι $h(0) = 0$ (1)

Ακόμη $xf(x) \geq \eta\mu x \Rightarrow xf(x) - \eta\mu x \geq 0 \Rightarrow h(x) \geq 0 \Rightarrow h(x) \geq h(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$

β) Καταρχήν είναι $h(x) = xf(x) - \eta\mu x \Rightarrow h'(x) = f(x) + xf'(x) - \sigma\upsilon\nu x$ (2)

Ακόμη η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$h'(0) = 0 \Rightarrow f(0) + 0 \cdot f'(0) - \sigma\upsilon\nu 0 = 0 \Rightarrow f(0) - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{f(0) = 1}$$

24.3 2)

α) Παρατηρούμε ότι $h(0) = 0 \cdot f(0) + 1 - e^0 - \eta\mu 0 \Rightarrow h(0) = 0$ (1)

Ακόμη $xf(x) + 1 \leq e^x + \eta\mu 2x \Rightarrow xf(x) + 1 - e^x - \eta\mu 2x \leq 0 \Rightarrow h(x) \leq 0 \Rightarrow h(x) \leq h(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε η h παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$

β) Καταρχήν είναι

$$h(x) = xf(x) + 1 - e^x - \eta\mu 2x \Rightarrow h'(x) = f(x) + xf'(x) - e^x - 2\sigma\upsilon\nu 2x$$
 (2)

Ακόμη η h παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$h'(0) = 0 \Rightarrow f(0) + 0 \cdot f'(0) - e^0 - 2\sigma\upsilon\nu 0 = 0 \Rightarrow f(0) - 1 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{f(0) = 3}$$

24.3 3)

α) Παρατηρούμε ότι

$$h(3) = f(3)\ln(3-2) + 3^2 - e^{3-3} - 8 \Rightarrow h(3) = f(3)\ln 1 + 9 - 1 - 8 \Rightarrow h(3) = 0$$
 (1)

Ακόμη

$$f(x)\ln(x-2) + x^2 \geq e^{x-3} + 8 \Rightarrow f(x)\ln(x-2) + x^2 - e^{x-3} - 8 \geq 0 \Rightarrow h(x) \geq 0 \Rightarrow h(x) \geq h(3)$$
, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 3$

β) Καταρχήν είναι $h(x) = f(x)\ln(x-2) + x^2 - e^{x-3} - 8 \Rightarrow$

$$h'(x) = f'(x)\ln(x-2) + \frac{f(x)}{x-2} + 2x - e^{x-3}$$
 (2)

Ακόμη η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 3$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$h'(3) = 0 \Rightarrow f'(3)\ln(3-2) + \frac{f(3)}{3-2} + 2 \cdot 3 - e^{3-3} = 0 \Rightarrow f'(3) \cdot 0 + f(3) + 6 - 1 = 0 \Rightarrow f(3) = -5$$

24.3 4)

α) Παρατηρούμε ότι $h(1) = f(1) + g(1) - 1^2 \stackrel{f(1)+g(1)=2}{\Rightarrow} h(1) = 1$ (1)

$$\text{Ακόμη } f(x) + g(x) \leq 1 + x^2 \Rightarrow f(x) + g(x) - x^2 \leq 1 \Rightarrow h(x) \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) \leq h(1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Οπότε η } h \text{ παρουσιάζει μέγιστο στο } x_0 = 1$$

β) Καταρχήν είναι $h(x) = f(x) + g(x) - x^2 \Rightarrow h'(x) = f'(x) + g'(x) - 2x$ (2)

Ακόμη η h παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 1$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα

$$\text{Fermat θα ισχύει } h'(1) = 0 \Rightarrow f'(1) + g'(1) - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \boxed{f'(1) + g'(1) = 2}$$

24.3 5)

α) Παρατηρούμε ότι $h(0) = e^{f(0)} - g(0) \stackrel{f(0)=g(0)=0}{\Rightarrow} h(0) = 1$ (1)

$$\text{Ακόμη } e^{f(x)} \geq g(x) + 1 \Rightarrow e^{f(x)} - g(x) \geq 1 \Rightarrow h(x) \geq 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} h(x) \geq h(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Οπότε η } h \text{ παρουσιάζει ελάχιστο στο } x_0 = 0$$

β) Καταρχήν είναι $h(x) = e^{f(x)} - g(x) \Rightarrow h'(x) = e^{f(x)} f'(x) - g'(x)$ (2)

Ακόμη η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα

$$\text{Fermat θα ισχύει } h'(0) = 0 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} h'(x) = e^{f(0)} f'(0) - g'(0) = 0 \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} \boxed{f'(0) = g'(0)}$$