

Έχουμε ότι

$$2f(x) \geq f(\alpha) + f(\beta) \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=\alpha} 2f(\alpha) \geq f(\alpha) + f(\beta) \Rightarrow f(\alpha) \geq f(\beta) \quad (1)$$

και

$$2f(x) \geq f(\alpha) + f(\beta) \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=\beta} 2f(\beta) \geq f(\alpha) + f(\beta) \Rightarrow f(\beta) \geq f(\alpha) \quad (2)$$

Οπότε $(1), (2) \Rightarrow f(\alpha) = f(\beta)$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$2f(x) \geq f(\alpha) + f(\beta) \xRightarrow{f(\alpha)=f(\beta)} 2f(x) \geq 2f(\alpha) \Rightarrow f(x) \geq f(\alpha)$$

που σημαίνει ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 = \alpha$ (προφανώς και στο $x_1 = \beta$) ολικό

ελάχιστο επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$

Ακόμη

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)

$$f(\alpha) = f(\beta)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\gamma) = 0$

Η συνάρτηση f'

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \gamma]$ και στο $[\gamma, \beta]$
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, γ) και στο (γ, β)
- $f'(\alpha) = f'(\gamma) = 0$ και $f'(\gamma) = f'(\beta) = 0$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[\alpha, \gamma]$ και στο διάστημα $[\gamma, \beta]$

υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \gamma)$ και $\xi_2 \in (\gamma, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) = f''(\xi_2) = 0$

Η συνάρτηση f''

- είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$
- είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2)
- $f''(\xi_1) = f''(\xi_2) = 0$

Οπότε για τη συνάρτηση f'' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle

στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f'''(\xi) = 0$