

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο διάστημα $[α,β]$. Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο στο διάστημα $[α,β]$. Τα δύο αυτά ακρότατα δεν μπορεί να είναι ίσα διότι τότε η συνάρτηση f θα ήταν σταθερή και τότε θα παρουσίαζε ακρότατο σε κάθε σημείο άρα και στα $α$ και $β$ πράγμα άτοπο

Άρα η f παρουσιάζει δύο διαφορετικά ακρότατα και μάλιστα στο εσωτερικό του διαστήματος $[α,β]$, διότι στο $x_1 = α$ και στο $x_2 = β$ η f δεν παρουσιάζει ακρότατο

Έστω λοιπόν ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $ξ_1 ∈ (1,4)$ και ολικό μέγιστο στο $ξ_2 ∈ (1,4)$. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα είναι $f'(ξ_1) = 0$ και

$$f'(ξ_2) = 0$$

Υποθέτουμε ότι $ξ_1 < ξ_2$. Τότε

Η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[ξ_1, ξ_2]$

είναι παραγωγίσιμη στο $(ξ_1, ξ_2)$, αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[α,β]$

$$\left. \begin{array}{l} f'(ξ_1) = 0 \\ f'(ξ_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(ξ_1) = f'(ξ_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[ξ_1, ξ_2]$ και επομένως υπάρχει $ξ ∈ (ξ_1, ξ_2) \Rightarrow ξ ∈ (α,β)$, τέτοιο ώστε

$$f''(ξ) = 0$$