

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(f(x))$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$ (1)

Επειδή η h παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα είναι $h'(1) = 0 \Rightarrow f'(f(1)) \cdot f'(1) = 0 \Rightarrow f'(f(1)) = 0$ ή $f'(1) = 0$

Όμως $f'(1) \neq 0$ (διότι η f' είναι $1 - 1$ και $f'(2) = 0$) άρα

$$f'(f(1)) = 0 \Rightarrow f'(f(1)) = f'(2) \Rightarrow \boxed{f(1) = 2}$$