

Αν η συνάρτηση $f(x) = ax^4 + bx^3 + \gamma x^2 + x - 2$, $a, \beta \neq 0$, έχει τρία διαφορετικά ακρότατα, να αποδειχτεί ότι $3\beta^2 > 8\alpha\gamma$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 4ax^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + 1$

Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και

$\Gamma(x_3, f(x_3))$ με $x_1 < x_2 < x_3$. Τότε από το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0$$

Επομένως

Η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πολυωνυμική

είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ως πολυωνυμική με $f''(x) = 12ax^2 + 6\beta x + 2\gamma$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x_1) = 0 \\ f'(x_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x_1) = f'(x_2) = 0$$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1) = 0$

Ακόμη, η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[x_2, x_3]$ ως πολυωνυμική

είναι παραγωγίσιμη στο (x_2, x_3) ως πολυωνυμική με $f''(x) = 12ax^2 + 6\beta x + 2\gamma$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x_2) = 0 \\ f'(x_3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x_2) = f'(x_3) = 0$$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_2, x_3]$ και επομένως υπάρχει $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_2) = 0$

Οπότε η εξίσωση $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12ax^2 + 6\beta x + 2\gamma = 0$ έχει δύο ρίζες πράγμα που σημαίνει ότι για την διακρίνουσα ισχύει

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 36\beta^2 - 4 \cdot 12a \cdot 2\gamma > 0 \Leftrightarrow 36\beta^2 - 96a\gamma > 0 \stackrel{\text{διαφορούμε με } 12}{\Leftrightarrow} 3\beta^2 - 8a\gamma > 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{3\beta^2 > 8a\gamma}$$