

24.15 1)

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο διάστημα $[1, 3]$. Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο στο διάστημα $[1, 3]$. Τα δύο αυτά ακρότατα δεν μπορεί να είναι ίσα αφού $f(2) < f(1) < f(3)$. Άρα η f παρουσιάζει δύο διαφορετικά ακρότατα εκ των οποίων το ένα τουλάχιστον θα βρίσκεται στο εσωτερικό του διαστήματος $[1, 3]$, διότι στο $x_0 = 1$ η f δεν παρουσιάζει ούτε ολικό ελάχιστο, ούτε ολικό μέγιστο λόγω της σχέσης $f(2) < f(1) < f(3)$.

Αν λοιπόν η f παρουσιάζει ακρότατο στο $\xi \in (1, 3)$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα είναι $f'(\xi) = 0$.

24.15 2)

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$. Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο στο διάστημα $[1, 3]$. Τα δύο αυτά ακρότατα δεν μπορεί να είναι ίσα αφού $f(2) < f(1) < f(4) < f(3)$.

Άρα η f παρουσιάζει δύο διαφορετικά ακρότατα και μάλιστα στο εσωτερικό του διαστήματος $[1, 2]$, διότι στο $x_1 = 1$ και στο $x_2 = 4$ η f δεν παρουσιάζει ούτε ολικό ελάχιστο, ούτε ολικό μέγιστο λόγω της σχέσης $f(2) < f(1) < f(4) < f(3)$.

Έστω λοιπόν ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\xi_1 \in (1, 4)$ και ολικό μέγιστο στο $\xi_2 \in (1, 4)$. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα είναι $f'(\xi_1) = 0$ και

$$f'(\xi_2) = 0$$

Υποθέτουμε ότι $\xi_1 < \xi_2$. Τότε

Η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$

είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, 4]$

$$\left. \begin{array}{l} f'(\xi_1) = 0 \\ f'(\xi_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \Rightarrow \xi \in (1, 4)$, τέτοιο ώστε

$$f''(\xi) = 0$$