

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

24.14 1)

Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \neq 0$ σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα είναι $f'(x_0) = 0$. Οπότε

$$xf''(x) + 3x(f'(x))^2 = 1 - e^x \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} x_0 f''(x_0) + 3x(f'(x_0))^2 = 1 - e^{x_0}$$

$$\xrightarrow{f'(x_0)=0} x_0 f''(x_0) = 1 - e^{x_0} \xrightarrow{f'(x_0) \neq 0} f''(x_0) = \frac{1 - e^{x_0}}{x_0} < 0 \quad (1)$$

$$\text{Όμως αν } x_0 > 0 \Rightarrow e^{x_0} > e^0 \Rightarrow 1 - e^{x_0} < 0 \Rightarrow \frac{1 - e^{x_0}}{x_0} < 0 \xrightarrow{(1)} f''(x_0) < 0$$

$$\text{ενώ αν } x_0 < 0 \Rightarrow e^{x_0} < e^0 \Rightarrow 1 - e^{x_0} > 0 \Rightarrow \frac{1 - e^{x_0}}{x_0} < 0 \xrightarrow{(1)} f''(x_0) < 0$$

άρα σε κάθε περίπτωση είναι $f''(x_0) < 0$

24.14 2)

Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \neq 0$ σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα είναι $f'(x_0) = 0$

Ακόμη

$$2xf'(x) + x^2 f''(x) = x - e^x \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}}$$

$$\Rightarrow 2f'(x) + 2xf''(x) + 2xf'(x) + x^2 f''(x) = 1 - e^x \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} 2f'(x_0) + 2x_0 f''(x_0) + 2x_0 f'(x_0) + x_0^2 f''(x_0) = 1 - e^{x_0} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{f'(x_0)=0} 2x_0 f''(x_0) + 2x_0 f(x_0) = 1 - e^{x_0} \Rightarrow 2x_0 f''(x_0) = 1 - e^{x_0} - 2x_0 f(x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x_0) = \frac{1 - e^{x_0} - 2x_0 f(x_0)}{2x_0}$$

Είναι

$$\left. \begin{array}{l} x_0 > 0 \Rightarrow e^{x_0} > e^0 \Rightarrow e^{x_0} > 1 \Rightarrow 1 - e^{x_0} < 0 \\ x_0 > 0 \\ f(x_0) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_0 f(x_0) > 0 \Rightarrow -x_0 f(x_0) < 0 \left. \begin{array}{l} \Rightarrow 1 - e^{x_0} - x_0 f(x_0) < 0 \\ x_0 > 0 \Rightarrow 2x_0 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{f''(x_0) < 0}$$

24.14 3)

Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \neq 0$ σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα είναι $f'(x_0) = 0$

Ακόμη

$$3x^2 f'(x) + 2f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + x^3 \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}}$$

$$\Rightarrow 6xf'(x) + 3x^2 f''(x) + 2f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x + 3x^2 \Rightarrow$$

$$\overset{\text{θέτουμε } x=x_0}{\Rightarrow} \Rightarrow 6x_0f'(x_0)+3x_0^2f''(x_0)+2f'(x_0)=(2x_0-2)e^x+(x_0^2-2x_0+2)e^x+3x_0^2\Rightarrow$$

$$\overset{f'(x_0)=0}{\Rightarrow} 3x_0^2f''(x_0)=e^x\left[\left(\cancel{2x_0}-\cancel{2}\right)+\left(x_0^2-\cancel{2x_0}+\cancel{2}\right)\right]+3x_0^2\Rightarrow 3x_0^2f''(x_0)=e^xx_0^2+3x_0^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x_0^2f''(x_0)=e^xx_0^2+3x_0^2 \overset{x_0\neq 0}{\Rightarrow} f''(x_0)=\overset{e^xx_0^2+3x_0^2>0}{\frac{e^xx_0^2+3x_0^2}{3x_0^2}} \Rightarrow \boxed{f''(x_0)>0}$$