

24.12 1)

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 2 \text{ και } f''(x) = 12x^2 - 12x + 6. \text{ Παρατηρούμε ότι}$$

$$f''(x) = 6(2x^2 - 2x + 1), \Delta = 4 - 8 = -4 < 0 \text{ οπότε } f''(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Έστω ότι η f έχει δύο ακρότατα στο x_1 και στο x_2 με $x_1 < x_2$. Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Τότε

Η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, ως πολυωνυμική

είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , ως πολυωνυμική

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ υπάρχει ξ τέτοιος ώστε $f''(\xi) = 0$ άτοπο διότι $f''(x) \neq 0$

Άρα η f δεν μπορεί να έχει δύο ακρότατα, οπότε θα έχει το πολύ ένα ακρότατο

24.12 2)

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x - 4 \text{ και } f''(x) = 12x^2 - 6x + 4. \text{ Παρατηρούμε ότι}$$

$$f''(x) = 2(6x^2 - 3x + 2), \Delta = 36 - 196 = -160 < 0 \text{ οπότε } f''(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Έστω ότι η f έχει δύο ακρότατα στο x_1 και στο x_2 με $x_1 < x_2$. Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Τότε

Η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, ως πολυωνυμική

είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , ως πολυωνυμική

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ υπάρχει ξ τέτοιος ώστε $f''(\xi) = 0$ άτοπο διότι $f''(x) \neq 0$

Άρα η f δεν μπορεί να έχει δύο ακρότατα, οπότε θα έχει το πολύ ένα ακρότατο

24.12 3)

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 4x - 3 \text{ και } f''(x) = 12x^2 + 12x + 4. \text{ Παρατηρούμε ότι}$$

$$f''(x) = 4(3x^2 + 3x + 1), \Delta = 9 - 12 = -3 < 0 \text{ οπότε } f''(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Έστω ότι η f έχει δύο ακρότατα στο x_1 και στο x_2 με $x_1 < x_2$. Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Τότε

Η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, ως πολυωνυμική

είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , ως πολυωνυμική

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ υπάρχει ξ τέτοιος ώστε $f''(\xi) = 0$ άτοπο διότι $f''(x) \neq 0$

Άρα η f δεν μπορεί να έχει δύο ακρότατα, οπότε θα έχει το πολύ ένα ακρότατο

24.12 4)

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$f'(x) = 6x^5 + 8x^3 + 2x - 4$ και $f''(x) = 30x^4 + 24x^2 + 2$. Παρατηρούμε ότι $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Έστω ότι η f έχει δύο ακρότατα στο x_1 και στο x_2 με $x_1 < x_2$. Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Τότε

Η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, ως πολυωνυμική

είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , ως πολυωνυμική

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ υπάρχει ξ τέτοιος ώστε $f''(\xi) = 0$ άτοπο διότι $f''(x) \neq 0$

Άρα η f δεν μπορεί να έχει δύο ακρότατα, οπότε θα έχει το πολύ ένα ακρότατο