

23.7 1)

- α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(1+x) = 0 \stackrel{e^x > 0}{\Rightarrow} x = -1$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$

- β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{e}$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow -e^{-x} + \frac{1}{e} = 0 \Rightarrow e^{-x} = e^{-1} \Rightarrow -x = -1 \Rightarrow x = 1$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

23.7 2)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(1-x) \stackrel{e^{-x} > 0}{\Rightarrow} x = 1$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$

γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$

23.7 3)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} = e^{-2x}(1-2x)$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-2x}(1-2x) \stackrel{e^{-2x} > 0}{\Rightarrow} x = \frac{1}{2}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

23.7 4)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = (x-3)e^x + e^x = e^x(x-2)$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(x-2) \stackrel{e^x > 0}{\Rightarrow} x = 2$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$

γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$

23.7 5)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = e^{-x} - (x-2)e^x = e^{-x}(1-x+2) = e^{-x}(3-x)$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(3-x) \stackrel{e^{-x} > 0}{\Rightarrow} x = 3$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 3]$

γνησίως φθίνουσα στο $[3, +\infty)$

23.7 6)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3 + x)$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 e^x (3 + x) \stackrel{e^x > 0}{\Rightarrow} x = -3 \text{ ή } x = 0$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$				

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -3]$

γνησίως αύξουσα στο $[-3, +\infty)$

23.7 7)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = xe^x (2 + x)$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow xe^x (2 + x) \stackrel{e^x > 0}{\Rightarrow} x = -2 \text{ ή } x = 0$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$				

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2]$

γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0]$

γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

23.7 8)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = e^{x^2} + xe^{x^2} 2x = e^{x^2} (1 + 2x^2)$$

Προφανώς είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

23.7 9)

Η $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} - x^2 e^{-x^2} 2x = 2xe^{-x^2} (1 - x^2)$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow 2xe^{-x^2} (1 - x^2) \stackrel{e^{-x^2} > 0}{\Rightarrow} x = -1 \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = 1$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$							

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$

γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0]$

γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$

γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$

23.7 10)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = e^x + 1$$

Προφανώς είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

23.7 11)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως διαφορά παραγωγίσιμων με $f'(x) = 1 - e^x$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - e^x = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = 1$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$

γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

23.7 12)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως διαφορά παραγωγίσιμων με $f'(x) = e^x - 3$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 3 = 0 \Rightarrow e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \ln 3]$

γνησίως αύξουσα στο $[\ln 3, +\infty)$

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο

$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{x^2}$

Προφανώς είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$