

23.6 1)

$$\Delta=64, x_{01,2}=\frac{-6\pm 8}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_{01}=1 \\ x_{02}=-7 \end{matrix}$$

Είναι $x^2 + 6x - 7 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -7] \cup [1, +\infty)$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -7] \cup [1, +\infty)$.

Είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, -7) \cup (1, +\infty)$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων (στο $x_1 = -7$ και στο $x_2 = 1$ δεν είναι παραγωγίσιμη, αλλά είναι συνεχής) με

$$f'(x) = \frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x-7}} = \frac{\cancel{2}(x+3)}{\cancel{2}\sqrt{x^2+6x-7}} = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x-7}}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x-7}} = 0 \Rightarrow x = -3$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-7	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$	-				+
$f(x)$					

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -7]$

γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

23.6 2)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, (στο $x_0 = 0$ δεν είναι παραγωγίσιμη, αλλά είναι συνεχής) με

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Προφανώς είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

23.6 3)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 5]$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 5)$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων (στο $x_0 = 5$ δεν είναι παραγωγίσιμη, αλλά είναι συνεχής) με

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{5-x}}$$

Προφανώς είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 5)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 5]$

23.6 4)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ (το τριώνυμο έχει αρνητική διακρίνουσα). Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}} = \frac{2(x-2)}{2\sqrt{x^2-4x+5}}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(x-2)}{2\sqrt{x^2-4x+5}} = 0 \Rightarrow x = 2$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$

γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$

23.6 5)

$$\Delta=16, x_{01,2}=\frac{-8\pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_{01}=-6 \\ x_{02}=-2 \end{cases}$$

Είναι $x^2+8x+12 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -6] \cup [-2, +\infty)$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -6] \cup [-2, +\infty)$.

Είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, -6) \cup (-2, +\infty)$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων (στο $x_1 = -6$ και στο $x_2 = -2$ δεν είναι παραγωγίσιμη, αλλά είναι συνεχής) με

$$f'(x) = \frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x+12}} = \frac{2(x+4)}{2\sqrt{x^2+8x+12}} = \frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x+12}}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x+12}} = 0 \Rightarrow x = -4$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-6	-4	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$				$+$
$f(x)$					

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -6]$

γνησίως αύξουσα στο $[-2, +\infty)$

23.6 6)

$$\Delta=16, x_{01,2}=\frac{-2\pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_{01}=-1 \\ x_{02}=3 \end{cases}$$

Είναι $-x^2+2x+3 \geq 0 \Rightarrow x \in [-1, 3]$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [-1, 3]$.

Είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 3)$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων (στο $x_1 = -1$ και στο $x_2 = 3$ δεν είναι παραγωγίσιμη, αλλά είναι συνεχής) με

$$f'(x) = \frac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x+3}} = \frac{\cancel{2}(-x+1)}{\cancel{2}\sqrt{-x^2+2x+3}} = \frac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} = 0 \Rightarrow x = 1$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$					

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$

γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$

23.6 7)

$$\Delta = 16, x_{01,2} = \frac{6 \pm 4}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x_{01} = -5 \\ x_{02} = -1 \end{cases}$$

Είναι $-x^2 - 6x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \in [-5, -1]$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [-5, -1]$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(-5, -1)$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων (στο $x_1 = -5$ και στο $x_2 = -1$ δεν είναι παραγωγίσιμη, αλλά είναι συνεχής) με

$$f'(x) = \frac{-2x-6}{2\sqrt{-x^2-6x-5}} = \frac{\cancel{2}(-x-3)}{\cancel{2}\sqrt{-x^2-6x-5}} = \frac{-x-3}{\sqrt{-x^2-6x-5}}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x-3}{\sqrt{-x^2-6x-5}} = 0 \Rightarrow x = -3$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-5	-3	-1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$					

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $[-5, -3]$

γνησίως φθίνουσα στο $[-3, -1]$

23.6 8)

Είναι $2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 2]$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού $A = [0, 2]$.

Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων (στο $x_1 = 0$ και στο $x_2 = 2$ δεν είναι παραγωγίσιμη, αλλά είναι συνεχής) με

$$f'(x) = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{\cancel{2}(1-x)}{\cancel{2}\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} = 0 \Rightarrow x = 1$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$					

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$

γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$

23.6 9)

Είναι $x^3 + 4x^2 + 4x \geq 0 \Rightarrow x(x^2 - 4x + 4) \geq 0 \Rightarrow x(x-2)^2 \geq 0$. Οπότε η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$.

Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων (στο $x_1 = 0$ και στο $x_2 = 2$ δεν είναι παραγωγίσιμη, αλλά είναι συνεχής) με

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 8x + 4}{2\sqrt{x^3 - 4x^2 + 4x}}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 8x + 4}{2\sqrt{x^3 - 4x^2 + 4x}} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\Delta = 16, x_{01,2} = \frac{8 \pm 4}{6} \Rightarrow \begin{matrix} x_{01} = \frac{4}{3} \\ x_{02} = 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ ή } x = 2$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+
$f(x)$					

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{2}{3}\right]$

γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$

γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$

23.6 10)

Είναι $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [1, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων (στο $x_1 = 1$ δεν είναι παραγωγίσιμη, αλλά είναι συνεχής) με

$$f'(x) = \sqrt{x-1} + \frac{x}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2\sqrt{x-1}^2 + x}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2(x-1) + x}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2x-2+x}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$$

είναι $f'(x) > 0$ (διότι $x \geq 1$) για κάθε $x \in (1, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων (στο $x_1 = 0$ δεν είναι παραγωγίσιμη, αλλά είναι συνεχής) με

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}^2 + x - 3}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + x - 3}{2\sqrt{x}} = \frac{3x - 3}{2\sqrt{x}} = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow 3(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	$+$
$f(x)$			$\nearrow$	$\searrow$

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$

γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \left(\frac{9}{2}, +\infty\right)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{9}{2}, +\infty\right)$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x\sqrt{2x-9} - x^2 \frac{1}{\sqrt{2x-9}}}{\sqrt{2x-9}^2} = \frac{2x\sqrt{2x-9} - \frac{x^2}{\sqrt{2x-9}}}{2x-9} = \frac{\frac{2x\sqrt{2x-9}^2 - x^2}{\sqrt{2x-9}}}{2x-9} = \\ &= \frac{2x\sqrt{2x-9}^2 - x^2}{(2x-9)\sqrt{2x-9}} = \frac{2x(2x-9) - x^2}{(2x-9)\sqrt{2x-9}} = \frac{4x^2 - 18x - x^2}{(2x-9)\sqrt{2x-9}} = \frac{3x^2 - 18x}{(2x-9)\sqrt{2x-9}} = \\ &= \frac{3x(x-6)}{(2x-9)\sqrt{2x-9}} \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x(x-6)}{2x-9} = 0 \Rightarrow 3x(x-6) = 0 \Rightarrow x = 6 \quad \begin{matrix} x > \frac{9}{2} \end{matrix}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	$\frac{9}{2}$	6	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	$+$
$f(x)$			$\nearrow$	$\searrow$

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $\left(\frac{9}{2}, 6\right]$

γνησίως αύξουσα στο $[6, +\infty)$