

23.5 1)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη

στο A , ως ρητή με $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{2x}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+ 0 -		-
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1)$

γνησίως αύξουσα στο $(-1, 0]$

γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1)$

και γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$

23.5 2)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο A , ως ρητή με

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$

γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

23.5 3)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο A , ως ρητή με

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4} \cdot 2x = -\frac{2}{x^3}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$

γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

23.5 4)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως ρητή με

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$

γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

23.5 5)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο A , ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{5(x+2) - (5x+3)}{(x+2)^2} = \frac{\cancel{5x} + 10 - \cancel{5x} - 3}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$			

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2)$

γνησίως αύξουσα στο $(-2, +\infty)$

23.5 6)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο A , ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{4(x-1) - (4x+5)}{(x-1)^2} = \frac{\cancel{4x} - 4 - \cancel{4x} - 5}{(x-1)^2} = \frac{-9}{(x-1)^2}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$			

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1)$

γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$

23.5 7)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$

γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$

γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$

23.5 8)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο A , ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\emptyset$	$-$	$\parallel$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\parallel$	$\searrow$		$\nearrow$

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$

γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1)$

γνησίως φθίνουσα στο $(1, 2]$

γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$

23.5 9)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Είναι παραγωγίσιμη στο A , ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{4x^2 - 2x - 2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$						

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$

γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{1}{2}\right)$

γνησίως φθίνουσα στο $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$

γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

23.5 10)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο A , ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = -\sqrt{3} \text{ ή } x = \sqrt{3}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	-	+
$f(x)$							

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -\sqrt{3}]$

γνησίως φθίνουσα στο $[-\sqrt{3}, -1)$

γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 1)$

γνησίως φθίνουσα στο $(1, \sqrt{3}]$

γνησίως αύξουσα στο $[\sqrt{3}, +\infty)$

23.5 11)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο A , ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{3x^3 - 3x^2 - x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = \frac{3}{2}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	↘		↘		↗

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1)$

γνησίως φθίνουσα στο $\left(1, \frac{3}{2}\right]$

γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

23.5 12)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο A , ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^3-1) - x^4 \cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{4x^6 - 4x^3 - 3x^6}{(x^3-1)^2} = \frac{x^6 - 4x^3}{(x^3-1)^2} = \frac{x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = \sqrt[3]{4}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$\sqrt[3]{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$

γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1)$

γνησίως φθίνουσα στο $\left[1, \sqrt[3]{4}\right]$

γνησίως αύξουσα στο $\left[\sqrt[3]{4}, +\infty\right)$

23.5 13)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+2) - (x^2+1)2x}{(x^2+2)^2} = \frac{\cancel{2x^3} + 4x - \cancel{2x^3} - 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2x}{(x^2+2)^2}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{(x^2+2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

23.5 14)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ (διότι ο παρονομαστής έχει αρνητική διακρίνουσα και δεν μηδενίζεται). Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως ρητή με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-1)(x^2+x+1) - (x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \\ &= \frac{\cancel{2x^3} + \cancel{2x^2} + \cancel{2x} - \cancel{x^2} - \cancel{x} - 1 - \cancel{2x^3} - \cancel{x^2} + 2x^2 + \cancel{x} - \cancel{2x} - 1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2} = \\ &= \frac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$

γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$

γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

23.5 15)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο A , ως ρητή με

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{3 \cdot 2x}{x^4} = \frac{-2x^2 + 6x}{x^4} = \frac{-2x(x-3)}{x^4}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x(x-3)}{x^4} = 0 \Rightarrow x = 3$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	-
$f(x)$				

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$

γνησίως αύξουσα στο $(0, 3]$

γνησίως φθίνουσα στο $[3, +\infty)$

23.5 16)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο A , ως ρητή με

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2x}{x^4} - \frac{3x^2}{x^6} = \frac{-x^2 - 2x - 3}{x^2}$$

Είναι $f'(x) < 0$ (διότι $\Delta = 4 - 12 < 0$)

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$			

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$

γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

23.5 17)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο A , ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{1}{2}2x - \frac{1}{x^2} = x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - 1}{x^2}$$

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3 - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-	+
$f(x)$				

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$

γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$

γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

23.5 18)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο A , ως ρητή με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x-1)(x+1)^3 - 3(x-1)^2(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{(x-1)(x+1)^2[2(x+1) - 3(x-1)]}{(x+1)^6} \\ &= \frac{(x-1)(x+1)^2(-x+5)}{(x+1)^6} \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)^2(-x+5)}{(x+1)^6} = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = 5$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1	1	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\parallel$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\parallel$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1)$

γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 1]$

γνησίως αύξουσα στο $[1, 5]$

γνησίως φθίνουσα στο $[5, +\infty)$

23.5 19)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο A , ως ρητή με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-3(1-x)^2 x^2 - 2x(1-x)^3}{x^2} = \frac{(1-x)^2 x[-3x - 2(1-x)]}{x^2} = \\ &= \frac{(1-x)^2 x(-3x - 2 + 2x)}{x^2} = \frac{(1-x)^2 x(-x - 2)}{x^2} = \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{(1-x)^2 x(-x-2)}{x^2} \stackrel{x \neq 0}{=} 0 \Rightarrow x = -2 \text{ ή } x = 1$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	-	0	-
$f(x)$						

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -2]$

γνησίως αύξουσα στο $[-2, 0)$

γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$