

Έχουμε ότι

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο $[a, \beta]$

είναι παραγωγίσιμη στο (a, β)

$$f(a) = f(\beta) = 0$$

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

Τώρα επειδή είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ η f' θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$. Οπότε

$$\text{για κάθε } x < \xi \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$\text{για κάθε } x > \xi \Rightarrow f'(x) > f'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	a	ξ	β	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		0	$f(\xi)$	0	

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $[a, \xi]$

γνησίως αύξουσα στο $[\xi, \beta]$

Επομένως

$$\left. \begin{array}{l} \text{για κάθε } x \in (a, \xi] \Rightarrow f(x) < f(a) = 0 \Rightarrow f(x) < 0 \\ \text{για κάθε } x \in [\xi, \beta) \Rightarrow f(x) < f(\beta) = 0 \Rightarrow f(x) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (a, \beta)$$