

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x-1} \ln x - \frac{1}{x} \ln(x-1)}{\ln^2 x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{x \ln x - (x-1) \ln(x-1)}{x(x-1)}}{\ln^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x \ln x - (x-1) \ln(x-1)}{x(x-1) \ln^2 x} \quad (1)$$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $g: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x \ln x$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$ με $g'(x) = \ln x + 1 \stackrel{x>2}{\Rightarrow} g'(x) > 0$

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$. Άρα για κάθε $x \in (2, +\infty)$ έχουμε

$$x > x-1 \stackrel{g, \nearrow}{\Rightarrow} g(x) > g(x-1) \Rightarrow x \ln x > (x-1) \ln(x-1) \quad (2)$$

$(1), (2) \Rightarrow f'(x) > 0$ για κάθε $(2, +\infty)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα

β) Για κάθε $x > 2$ είναι

$$x < x+1 \stackrel{f, \nearrow}{\Rightarrow} f(x) < f(x+1) \Rightarrow \frac{\ln(x-1)}{\ln x} < \frac{\ln x}{\ln(x+1)} \stackrel{x>2 \Rightarrow \begin{cases} \ln x > 0 \\ \ln(x+1) > 0 \end{cases}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(x-1) \ln(x+1) < \ln^2 x}$$