

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[x, x+1]$,

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(x, x+1)$,

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (x, x+1)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} \Rightarrow \boxed{f'(\xi_1) = f(x+1) - f(x)} \quad (1)$$

Ομοίως

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[x+1, x+2]$,

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(x+1, x+2)$,

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in (x+1, x+2)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x+2) - f(x+1)}{(x+2) - (x+1)} \Rightarrow \boxed{f'(\xi_2) = f(x+2) - f(x+1)} \quad (2)$$

Επειδή $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα και επειδή προφανώς είναι $\xi_1 < \xi_2$, έχουμε

$$\xi_1 < \xi_2 \xRightarrow{f' \searrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \xRightarrow{(1),(2)} f(x+1) - f(x) > f(x+2) - f(x+1) \Rightarrow$$

$$2f(x+1) > f(x+2) + f(x) \Rightarrow \boxed{f(x+1) > \frac{f(x+2) + f(x)}{2}}$$