

Παρατηρούμε καταρχήν ότι το 1 είναι ρίζα της παραπάνω εξίσωσης διότι

$$3^1 + 4^1 = 7^1 \Leftrightarrow 3 + 4 = 7 \text{ που ισχύει}$$

Ακόμη

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x$, $x \in \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγισίμων, με

$$f'(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x \ln \frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln \frac{3}{5} \Rightarrow f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ οπότε η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα}$$

$\ln \frac{2}{5} < \ln 1 \Rightarrow \ln \frac{2}{5} < 0$
 $\ln \frac{3}{5} < \ln 1 \Rightarrow \ln \frac{3}{5} < 0$
 $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 0, \left(\frac{3}{5}\right)^x > 0$

$$\text{Ακόμη } 3^x + 4^x = 7^x \xrightarrow{\text{διαφορούμε με } 7^x \neq 0} \Leftrightarrow \frac{3^x}{7^x} + \frac{4^x}{7^x} = \frac{7^x}{7^x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1$$

και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη (άρα και $1 - 1$) συμπεραίνουμε ότι η f (άρα και η εξίσωση $3^x + 4^x = 7^x$) έχει το πολύ μία ρίζα

Οπότε τελικά η εξίσωση $3^x + 4^x = 7^x$, έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$