

Έχουμε ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \alpha e^{-\beta\kappa} - \beta e^{-\alpha\kappa} > \alpha - \beta &\Leftrightarrow \alpha e^{-\beta\kappa} - \alpha > \beta e^{-\alpha\kappa} - \beta \Leftrightarrow \alpha(e^{-\beta\kappa} - 1) > \beta(e^{-\alpha\kappa} - 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{e^{-\beta\kappa} - 1}{\beta} > \frac{e^{-\alpha\kappa} - 1}{\alpha} \end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $\boxed{\frac{e^{-\beta\kappa} - 1}{\beta} > \frac{e^{-\alpha\kappa} - 1}{\alpha}}$ για $0 < \alpha < \beta$. Οπότε

θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \frac{e^{-\kappa x} - 1}{x}$, $x > 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$h'(x) = \frac{-\kappa x e^{-\kappa x} - (e^{-\kappa x} - 1)}{x^2} = \frac{-\kappa x e^{-\kappa x} - e^{-\kappa x} + 1}{x^2}$$

Τώρα θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x) = -\kappa x e^{-\kappa x} - e^{-\kappa x} + 1$, $x \geq 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και για κάθε $x > 0$ είναι

$$g'(x) = \kappa^2 x e^{-\kappa x} - \cancel{\kappa e^{-\kappa x}} + \cancel{\kappa e^{-\kappa x}} = \kappa^2 x e^{-\kappa x}$$

Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$\begin{aligned} x > 0 &\stackrel{g'}{\Rightarrow} g(x) > g(0) \Rightarrow -\kappa x e^{-\kappa x} - e^{-\kappa x} + 1 > -\kappa \cdot 0 \cdot e^{-\kappa \cdot 0} - e^{-\kappa \cdot 0} + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\kappa x e^{-\kappa x} - e^{-\kappa x} + 1 > 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Επομένως για κάθε $x > 0$ είναι $h'(x) = \frac{-\kappa x e^{-\kappa x} - e^{-\kappa x} + 1}{x^2} \stackrel{(1)}{>} 0$

οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Άρα

$$0 < \boxed{\alpha < \beta} \stackrel{h'}{\Rightarrow} h(\alpha) < h(\beta) \Rightarrow \boxed{\frac{e^{-\alpha\kappa} - 1}{\alpha} < \frac{e^{-\beta\kappa} - 1}{\beta}}$$