

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = (1+x)^{\alpha} - 1 - x\alpha$, $x \in (0, +\infty)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $h'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha = \alpha[(1+x)^{\alpha-1} - 1]$

Για κάθε $x > 0$ είναι

$$1+x > 1 \xRightarrow{0 < \alpha < 1} (1+x)^{\alpha-1} < 1 \Rightarrow (1+x)^{\alpha-1} - 1 < 0 \xRightarrow{\alpha > 0} \alpha[(1+x)^{\alpha-1} - 1] < 0 \Rightarrow h'(x) < 0 ,$$

οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Άρα

$$\boxed{x > 0} \xRightarrow{h \downarrow} h(x) < h(0) \Rightarrow (1+x)^{\alpha} - 1 - x\alpha < 0 \Rightarrow \boxed{(1+x)^{\alpha} < 1 + x\alpha}$$