

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγισίμων, με

$$f'(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x \ln \frac{4}{3} + 4^x \ln 4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ οπότε η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα}$$

$\ln \frac{4}{3} > \ln 1 \Rightarrow \ln \frac{4}{3} > 0$
 $\ln 4 > 0$
 $\left(\frac{4}{3}\right)^x > 0, 4^x > 0$

β) Παρατηρούμε καταρχήν ότι το μηδέν είναι ρίζα της παραπάνω εξίσωσης διότι $4^0 + 12^0 = 2 \cdot 3^0 \Leftrightarrow 1 + 1 = 2$ που ισχύει

Ακόμη

$$4^x + 12^x = 2 \cdot 3^x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4^x}{3^x} + \frac{12^x}{3^x} = 2 \cdot \frac{\cancel{3^x}}{\cancel{3^x}} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x + 4^x - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη (άρα και 1-1) συμπεραίνουμε ότι η f (άρα και η εξίσωση $4^x + 12^x = 2 \cdot 3^x$) έχει το πολύ μία ρίζα

Οπότε τελικά η εξίσωση $4^x + 12^x = 2 \cdot 3^x$, έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$