

23.3 1)

- α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολωνυμική με $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24$

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 = 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ ρίζα το $x=1$
παραγοντοποίηση
με Horner

$\Rightarrow (x-1)(x^2 - x - 2) = 0$ $\begin{matrix} x^2-x-2 \\ \text{ρίζες: } -1, 2 \end{matrix}$ $\Rightarrow (x-1)(x-2)(x+1) = 0$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$

γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$

- β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολωνυμική με $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 1$

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ ρίζα το $x=1$
παραγοντοποίηση με Horner

$\Rightarrow (x-1)(4x^2 + x + 1) = 0$ $4x^2+x+1: \Delta = -23 < 0$ $\Rightarrow x = 1$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

23.3 2)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολωνυμική με

$f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24$

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24 = 0 \Rightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ ρίζα το $x=1$
παραγοντοποίηση με Horner

$x^2+3x+2: \Delta=1 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \frac{-3+1}{2} \Rightarrow x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{-3-1}{2} \Rightarrow x_2 = -2 \end{matrix}$

$\Rightarrow (x-1)(x^2 + 3x + 2) = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)(x+2)(x+1) = 0$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -2]$

γνησίως αύξουσα στο $[-2, -1]$

γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$

γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

23.3 3)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολωνυμική με

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 40x$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 + 12x^2 - 40x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 + 3x - 10) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{ρίζα το } x=1 \\ \text{παραγοντοποίηση με Horner} \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} x^2 + 3x - 10: \Delta = 49 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3+7}{2} \Rightarrow x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{-3-7}{2} \Rightarrow x_2 = -5 \end{cases} \\ \Rightarrow 4x(x-2)(x+5) = 0 \end{array}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-5	0	2	$+\infty$	
f'(x)	-	0	+	0	-	+
f(x)						

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -5]$

γνησίως αύξουσα στο $[-5, 0]$

γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$

γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$

23.3 4)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολωνυμική με

$$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 12x + 48$$

Είναι

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -12x^3 - 48x^2 + 12x + 48 = 0 \Rightarrow -x^3 - 4x^2 + x + 4 = 0 \quad \begin{array}{l} \text{ρίζα το } x=1 \\ \text{παραγοντοποίηση με Horner} \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} -x^2 - 5x - 4: \Delta = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5+3}{-2} \Rightarrow x_1 = -4 \\ x_2 = \frac{5-3}{-2} \Rightarrow x_2 = -1 \end{cases} \\ \Rightarrow (x-1)(-x^2 - 5x - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad -(x-1)(x+4)(x+1) = 0 \end{array}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-4		-1		1	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	0	+	0	-
f(x)							

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -4]$

γνησίως φθίνουσα στο $[-4, -1]$

γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$

γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$

23.3 5)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολωνυμική με

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow 4x(x-2)(x+2) = 0$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -2]$

γνησίως αύξουσα στο $[-2, 0]$

γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$

γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$

23.3 6)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική, με

$$f'(x) = 5x^4 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{3}x^2 = 5x^4 - x^3 + x^2$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow 5x^4 - x^3 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2(5x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$5x^2 - x + 1: \Delta = -19 < 0$

Επομένως είναι $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 0$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

23.3 7)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολωνυμική με

$$f'(x) = -15x^4 - 15x^2 + 30 = -15(x^4 + x^2 - 2)$$

$$x^2 + x - 2: \Delta = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1+3}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{-1-3}{2} \Rightarrow x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow -15(x^4 + x^2 - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -15(x^2 - 1)(x^2 + 2) = 0 \Rightarrow -15(x-1)(x+1)(x^2 + 2) = 0$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$					

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$

γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$

γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$