

23.29 1)

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f^3(x) + 3f(x) = 3e^x + 1 \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} 3f^2(x)f'(x) + 3f'(x) = 3e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)[3f^2(x) + 3] = 3e^x \xRightarrow{3f^2(x)+3 \neq 0} f'(x) = \frac{3e^x}{3f^2(x) + 3} \xRightarrow{\substack{3f^2(x)+3 > 0 \\ 3e^x > 0}} f'(x) > 0.$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) $f(x^2) < f(3x-2) \xRightarrow{f \nearrow} x^2 < 3x-2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \xRightarrow{\substack{x_1=1 \\ x_2=2}} \boxed{1 < x < 2}$

23.29 2)

α) Για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$f(x)e^{f(x)} = x \xRightarrow{\substack{e^{f(x)} > 0 \\ x > 0}} f(x) = \frac{x}{e^{f(x)}} \Rightarrow f(x) > 0 \quad (1)$$

Ακόμη για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$f(x)e^{f(x)} = x \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f'(x)e^{f(x)} + f(x)f'(x)e^{f(x)} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)e^{f(x)}[1 + f(x)] = 1 \xRightarrow{\substack{(1) \Rightarrow 1+f(x) > 0 \\ e^{f(x)} > 0}} f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}[1 + f(x)]} \xRightarrow{\substack{(1) \Rightarrow 1+f(x) > 0 \\ e^{f(x)} > 0}} f'(x) > 0.$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{\alpha}{\alpha+1} < \frac{\beta}{\beta+1}$. Οπότε θεωρούμε την συνάρτηση g με

$$g(x) = \frac{x}{x+1}, \quad x > 0$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{\cancel{x} + 1 - \cancel{x}}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Άρα

$$0 < \alpha < \beta \xRightarrow{g \nearrow} g(\alpha) < g(\beta) \Rightarrow \frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta} \xRightarrow{f \nearrow} \boxed{f\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) < f\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)}$$

23.29 3)

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f(x) + e^{f(x)} = x^3 + x^2 + 3x \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f'(x) + f'(x)e^{f(x)} = 3x^2 + 2x + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)[1 + e^{f(x)}] = 3x^2 + 2x + 3 \xRightarrow{1+e^{f(x)} \neq 0} f'(x) = \frac{3x^2 + 2x + 3}{1 + e^{f(x)}} \xRightarrow{\substack{3x^2+2x+3 > 0 \\ (\text{διότι } \Delta < 0)}} f'(x) > 0.$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) Έχουμε $f(\ln x) = f(1-x^2) \xRightarrow{f \nearrow: 1-1} \ln x = 1-x^2 \quad (1)$

Η εξίσωση (1) έχει προφανή ρίζα την $\boxed{x=1}$

Θα αποδείξουμε ότι η (1) δεν έχει άλλη ρίζα

Θεωρούμε λοιπόν την συνάρτηση g με $g(x) = \ln x + x^2 - 1 = 0$, $x > 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{1}{x} + 2x \stackrel{x>0}{\Rightarrow} g'(x) > 0$

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ και η εξίσωση (1) έχει το πολύ μία ρίζα

Τελικά η εξίσωση $f(\ln x) = f(1 - x^2)$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$

23.29 4)

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \stackrel{f'(x)g(x) > f(x)g'(x)}{\Rightarrow} h'(x) > 0$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) Έχουμε

$$f(2x) \cdot g(0) > f(0) \cdot g(2x) \stackrel{g(x) > 0}{\Leftrightarrow} \frac{f(2x)}{g(2x)} > \frac{f(0)}{g(0)} \stackrel{h}{\Leftrightarrow} h(2x) > h(0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow \boxed{x > 0}$$

23.29 5)

α) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε

$$h(x) = f(x) \cdot e^{-g(x)} \stackrel{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} h'(x) = f'(x) \cdot e^{-g(x)} - f(x) \cdot e^{-g(x)} \cdot g'(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h'(x) = e^{-g(x)} [f'(x) - f(x) \cdot g'(x)] \stackrel{f'(x) > f(x) \cdot g'(x)}{\Rightarrow} h'(x) > 0$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

β) Έχουμε

$$x \geq 0 \stackrel{h}{\Rightarrow} h(x) \geq h(0) \Rightarrow f(x) \cdot e^{-g(x)} \geq f(0) \cdot e^{-g(0)} \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow f(x) \cdot e^{-g(x)} \geq 0 \stackrel{e^{-g(x)} > 0}{\Rightarrow} \boxed{f(x) \geq 0}$$

23.29 6)

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f^3(x) + f(x) = e^{-x} + 2 - \frac{1}{e} \stackrel{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} 3f^2(x)f'(x) + f'(x) = -e^{-x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(x) [3f^2(x) + 1] = -e^{-x} \stackrel{3f^2(x)+1 \neq 0}{\Rightarrow} f'(x) = -\frac{e^{-x}}{3f^2(x) + 1} \stackrel{3f^2(x)+1 > 0}{\Rightarrow} f'(x) < 0.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

β) $f^3(x) + f(x) = e^{-x} + 2 - \frac{1}{e} \stackrel{\text{θέτουμε } x=1}{\Rightarrow} f^3(1) + f(1) = e^{-1} + 2 - \frac{1}{e} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f^3(1) + f(1) = \frac{1}{e} + 2 - \frac{1}{e} \Rightarrow f^3(1) + f(1) - 2 = 0 \stackrel{\text{θέτουμε } y=f(1)}{\Rightarrow} y^3 + y - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\stackrel{\text{παραγοντοποίηση με horner}}{\Rightarrow} (y-1)(y^2 + y + 2) = 0 \stackrel{\substack{y^2+y+2 \neq 0 \\ \text{διότι } \Delta = -7 < 0}}{\Rightarrow} y-1 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \boxed{f(1) = 1}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma) \quad & f(3 - 2f(x - 4)) < 1 \stackrel{f(1)=1}{\Rightarrow} f(3 - 2f(x - 4)) < f(1) \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} 3 - 2f(x - 4) < 1 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow -2f(x - 4) < -2 \Rightarrow f(x - 4) > 1 \Rightarrow f(x - 4) > f(1) \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} x - 4 > 1 \Rightarrow \boxed{x > 5}
 \end{aligned}$$