

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

23.28 1)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική, με $f'(x) = x^2 + 2\lambda x + 1$

Για να είναι η f , γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, θα πρέπει

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (2\lambda)^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow 4\lambda^2 \leq 4 \Rightarrow \lambda^2 \leq 1 \Rightarrow |\lambda| \leq 1 \Rightarrow \boxed{-1 \leq \lambda \leq 1}$$

23.28 2)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική, με $f'(x) = 9x^2 - 2(2\lambda - 1)x + 1$

Για να είναι η f , γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, θα πρέπει

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 4(2\lambda - 1)^2 - 36 \leq 0 \xrightarrow{\text{διαιρούμε με 4}} (2\lambda - 1)^2 - 9 \leq 0 \Rightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 9 \leq 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 \leq 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1-3}{2} \Rightarrow x_1 = -1 \\ \lambda_2 = \frac{1+3}{2} \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda - 8 \leq 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 \leq 0 \Rightarrow \boxed{-1 \leq \lambda \leq 2}$$

23.28 3)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} + \lambda = \frac{2x + \lambda(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{\lambda x^2 + 2x + \lambda}{x^2 + 1}$$

Για να είναι η f , γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, θα πρέπει ο αριθμητής του κλάσματος να είναι θετικός (ή έστω να μηδενίζεται σε μεμονωμένα σημεία) σε όλο το $\mathbb{R}$

Για να είναι όμως το τριώνυμο $\lambda x^2 + 2x + \lambda$ θετικό (ή μηδέν σε μεμονωμένα σημεία) σε όλο το $\mathbb{R}$ θα πρέπει

$$\begin{cases} \lambda > 0 \\ \text{και} \\ \Delta \leq 0 \Rightarrow 4 - 4\lambda^2 \leq 0 \Rightarrow 1 - \lambda^2 \leq 0 \Rightarrow \lambda \leq -1 \text{ ή } \lambda \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lambda \geq 1}$$

23.28 4)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική, με $f'(x) = -2x^2 + 4\lambda x - 2$

Επειδή το παραπάνω τριώνυμο έχει $\alpha = -2$ δεν μπορεί να είναι θετικό σε όλο το $\mathbb{R}$. Άρα είναι αδύνατο η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$