

23.26 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$, $x \geq 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $h'(x) = e^x - 1 - x$ (1)

Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x) = e^x - 1 - x$, $x \geq 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και για κάθε $x \geq 0$ είναι

$g'(x) = e^x - 1 \xrightarrow{x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq e^0 \Rightarrow e^x \geq 1} g'(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$x \geq 0 \xRightarrow{g'} g(x) \geq g(0) \Rightarrow e^x - 1 - x \geq e^0 - 1 - 0 \Rightarrow e^x - 1 - x \geq 0 \xRightarrow{(1)} h'(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$\boxed{x > 0} \Rightarrow h(x) > h(0) \Rightarrow e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} > e^0 - 1 - 0 - \frac{0^2}{2} \Rightarrow \boxed{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} > 0}$$

23.26 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2$, $x \leq 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0]$ με $h'(x) = 2e^x - 2x - 2 = 2(e^x - x - 1)$ (1)

Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x) = e^x - x - 1$, $x \leq 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0]$ και για κάθε $x \leq 0$ είναι

$g'(x) = e^x - 1 \xrightarrow{x \leq 0 \Rightarrow e^x \leq e^0 \Rightarrow e^x \leq 1} g'(x) \leq 0$ με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 0$, οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$. Άρα

$x \geq 0 \xRightarrow{g^{\searrow}} g(x) \geq g(0) \Rightarrow e^x - 1 - x \geq e^0 - 1 - 0 \Rightarrow e^x - 1 - x \geq 0 \xRightarrow{(1)} h'(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$\boxed{x < 0} \Rightarrow h(x) < h(0) \Rightarrow 2e^x - x^2 - 2x - 2 < 2e^0 - 0^2 - 2 \cdot 0 - 2 \Rightarrow \Rightarrow \boxed{2e^x - x^2 - 2x - 2 < 0}$$

23.26 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = (x-2)e^x + x + 2$, $x \geq 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με

$$h'(x) = e^x + (x-2)e^x + 1 = e^x(1+x-2) + 1 = e^x(x-1) + 1 \quad (1)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x) = e^x(x-1) + 1$, $x \geq 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και για κάθε $x \geq 0$ είναι

$g'(x) = e^x(x-1) + e^x = e^x(x-1+1) = xe^x \xrightarrow{x \geq 0} g'(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$x \geq 0 \Rightarrow \overset{g'}{g}(x) \geq g(0) \Rightarrow e^x(x-1)+1 \geq e^0(0-1)+1 \Rightarrow e^x(x-1)+1 \geq 0 \Rightarrow \overset{(1)}{h'(x)} \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$\boxed{x \geq 0} \xRightarrow{h'} h(x) > h(0) \Rightarrow (x-2)e^x + x + 2 > (0-2)e^0 + 0 + 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{(x-2)e^x + x + 2 > 0}$$

23.26 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = 2\sin x + x^2 - 2$, $x \geq 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $h'(x) = -2\eta\mu x + 2x = 2(x - \eta\mu x)$ (1)

Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x) = x - \eta\mu x$, $x \geq 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και για κάθε $x \geq 0$ είναι $g'(x) = 1 - \eta\mu x$ με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα για $x = 2k\pi$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$x \geq 0 \Rightarrow \overset{g'}{g}(x) \geq g(0) \Rightarrow x - \eta\mu x \geq 0 - \eta\mu 0 \Rightarrow x - \eta\mu x \geq 0 \Rightarrow \overset{(1)}{h'(x)} \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$\boxed{x \geq 0} \xRightarrow{h'} h(x) \geq h(0) \Rightarrow 2\sin x + x^2 - 2 \geq 2\sin 0 + 0^2 - 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\sin x + x^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow \boxed{2\sin x \geq 2 - x^2}$$

23.26 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x - \frac{x^3}{6} - \eta\mu x$, $x \geq 0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και για κάθε $x \geq 0$ είναι

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \sigma\upsilon\nu x \quad (1)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \sigma\upsilon\nu x$, $x \geq 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και για κάθε $x \geq 0$ είναι

$g'(x) = -x + \eta\mu x \Rightarrow \overset{\eta\mu x \leq x}{g'(x)} \leq 0$ με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα για $x = 0$, οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$x \geq 0 \Rightarrow \overset{g'}{g}(x) \leq g(0) \Rightarrow 1 - \frac{x^2}{2} - \sigma\upsilon\nu x \leq 1 - \frac{0^2}{2} - \sigma\upsilon\nu 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 - \frac{x^2}{2} - \sigma\upsilon\nu x \leq 0 \Rightarrow \overset{(1)}{f'(x)} \leq 0, \text{ με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για } \\ x = 0, \text{ οπότε η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } [0, +\infty). \text{ Άρα}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow \overset{f'}{f}(x) \leq f(0) \Rightarrow x - \frac{x^3}{6} - \eta\mu x \leq 0 - \frac{0^3}{6} - \eta\mu 0 \Rightarrow x - \frac{x^3}{6} - \eta\mu x \leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{x - \frac{x^3}{6} \leq \eta\mu x}$$

23.26 6)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = e^{2x} - 2xe^x + 1$, $x \geq 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με

$$h'(x) = 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x = 2e^x(e^x - 1 - x) \quad (1)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x) = e^x - 1 - x$, $x \geq 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και για κάθε $x \geq 0$ είναι

$$g'(x) = e^x - 1 \stackrel{x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq e^0 \Rightarrow e^x \geq 1}{\Rightarrow} g'(x) \geq 0 \text{ με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για } x = 0, \text{ οπότε η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [0, +\infty). \text{ Άρα}$$

$x \geq 0 \stackrel{g \nearrow}{\Rightarrow} g(x) \geq g(0) \Rightarrow e^x - 1 - x \geq e^0 - 1 - 0 \Rightarrow e^x - 1 - x \geq 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} h'(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$\boxed{x > 0} \stackrel{h \nearrow}{\Rightarrow} h(x) > h(0) \Rightarrow e^{2x} - 2xe^x + 1 > e^{2 \cdot 0} - 2 \cdot 0 \cdot e^0 + 1 \Rightarrow \boxed{e^{2x} - 2xe^x + 1 > 0}$$

23.26 7)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = (x+1)\ln(x+1) - x - \frac{x^2}{2}$, $x \geq 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με

$$h'(x) = \ln(x+1) + \cancel{(x+1)} \frac{1}{\cancel{x+1}} - 1 - \frac{2x}{2} = \ln(x+1) + \cancel{1} - \cancel{1} - x = \ln(x+1) - x \quad (1)$$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση g με $g(x) = \ln(x+1) - x$, $x \geq 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και για κάθε $x \geq 0$ είναι

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{\cancel{1} - x - \cancel{1}}{x+1} = \frac{-x}{x+1} \stackrel{x \geq 0}{\Rightarrow} g'(x) \leq 0 \text{ με την ισότητα να ισχύει}$$

μεμονωμένα μόνο για $x = 0$, οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$x \geq 0 \stackrel{g \searrow}{\Rightarrow} g(x) \leq g(0) \Rightarrow \ln(x+1) - x \leq \ln(0+1) - 0 \Rightarrow \ln(x+1) - x \leq 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} h'(x) \leq 0$ με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 0$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$\boxed{x > 0} \stackrel{h \searrow}{\Rightarrow} h(x) < h(0) \Rightarrow (x+1)\ln(x+1) - x - \frac{x^2}{2} < (0+1)\ln(0+1) - 0 - \frac{0^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)\ln(x+1) - x - \frac{x^2}{2} < 0 \Rightarrow (x+1)\ln(x+1) < x + \frac{x^2}{2}$$

23.26 8)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = (x+1)\ln x - 2x + 2 > 0$, $x \geq 1$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με

$$h'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x} - 2 = \frac{x \ln x + x + 1 - 2x}{x} = \frac{x \ln x - x + 1}{x} \quad (1)$$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση g με $g(x) = x \ln x - x + 1$, $x \geq 1$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ και για κάθε $x \geq 1$ είναι

$$g'(x) = \ln x + \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} - 1 = \ln x \stackrel{x \geq 1}{\Rightarrow} g'(x) \geq 0 \quad \text{με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο}$$

για $x = 1$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα

$$x \geq 1 \stackrel{g \nearrow}{\Rightarrow} g(x) \geq g(0) \Rightarrow x \ln x - x + 1 \geq 1 \cdot \ln 1 - 1 + 1 \Rightarrow x \ln x - x + 1 \geq 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} h'(x) \geq 0$$

με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 1$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα

$$\boxed{x > 1} \stackrel{h \nearrow}{\Rightarrow} h(x) > h(0) \Rightarrow (x+1) \ln x - 2x + 2 > (1+1) \ln 1 - 2 \cdot 1 + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1) \ln x - 2x + 2 > 0 \Rightarrow (x+1) \ln x > 2x - 2$$

23.26 9)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \ln^2 x - 2x + 2$, $x \geq 1$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με

$$h'(x) = \frac{2 \ln x}{x} - 2 = \frac{2 \ln x - 2x}{x} = \frac{2(\ln x - x)}{x} \quad (1)$$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση g με $g(x) = \ln x - x$, $x \geq 1$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ και για κάθε $x \geq 1$ είναι

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \leq 0 \quad \text{με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για } x = 1,$$

οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα

$$x \geq 1 \stackrel{g \searrow}{\Rightarrow} g(x) \leq g(1) \Rightarrow \ln x - x \leq \ln 1 - 1 \Rightarrow \ln x - x \leq 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} h'(x) \leq 1 \Rightarrow h'(x) < 0 \quad x = 0$$

, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα

$$\boxed{x > 1} \stackrel{h \searrow}{\Rightarrow} h(x) < h(0) \Rightarrow (x+1) \ln(x+1) - x - \frac{x^2}{2} < (0+1) \ln(0+1) - 0 - \frac{0^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1) \ln(x+1) - x - \frac{x^2}{2} < 0 \Rightarrow (x+1) \ln(x+1) < x + \frac{x^2}{2}$$

23.26 10)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$, $x \geq 0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f'(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ (1)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$, $x \geq 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $h'(x) = e^x - 1 - x$ (2)

Θεωρούμε και την συνάρτηση g με $g(x) = e^x - 1 - x$, $x \geq 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και για κάθε $x \geq 0$ είναι

$g'(x) = e^x - 1 \xrightarrow{x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq e^0 \Rightarrow e^x \geq 1} g'(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$x \geq 0 \xRightarrow{g'} g(x) \geq g(0) \Rightarrow e^x - 1 - x \geq e^0 - 1 - 0 \Rightarrow e^x - 1 - x \geq 0 \xRightarrow{(2)} h'(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$\boxed{x \geq 0} \Rightarrow h(x) \geq h(0) \Rightarrow e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \geq e^0 - 1 - 0 - \frac{0^2}{2} \Rightarrow f'(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$\boxed{x > 0} \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} > e^0 - 1 - 0 - \frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{6} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} > 0}$$

23.26 11)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = e^x - e^{-x} - x^2 - 2$, $x \geq 0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f'(x) = e^x + e^{-x} - 2x$ (1)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = e^x + e^{-x} - 2x$, $x \geq 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $h'(x) = e^x - e^{-x} - 2$ (2)

Θεωρούμε και την συνάρτηση g με $g(x) = e^x - e^{-x} - 2$, $x \geq 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και για κάθε $x \geq 0$ είναι

$g'(x) = e^x + e^{-x} \Rightarrow g'(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$x \geq 0 \xRightarrow{g'} g(x) \geq g(0) \Rightarrow e^x - e^{-x} - 2 \geq e^0 - e^{-0} - 2 \Rightarrow e^x - e^{-x} - 2 \geq 0 \xRightarrow{(2)} h'(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$\boxed{x \geq 0} \Rightarrow h(x) \geq h(0) \Rightarrow e^x + e^{-x} - 2x \geq e^0 + e^{-0} - 2 \cdot 0 \Rightarrow e^x + e^{-x} - 2x \geq 0 \xRightarrow{(1)} f'(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$\boxed{x > 0} \xRightarrow{f'} f(x) > f(0) \Rightarrow e^x - e^{-x} - x^2 - 2 > e^0 - e^{-0} - 0^2 - 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{e^x - e^{-x} - x^2 - 2 > 0}$$