

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

23.25 1)

Έχουμε ισοδύναμα $\beta \ln \alpha > \alpha \ln \beta \Leftrightarrow \frac{\ln \alpha}{\alpha} > \frac{\ln \beta}{\beta}$.

Οπότε θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x \in [e, +\infty)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[e, +\infty)$ με $h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

Οπότε για κάθε $x \in [e, +\infty)$ είναι $h'(x) < 0$. Οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο

$[e, +\infty)$. Άρα $\alpha < \beta \xRightarrow{h'} h(\alpha) > h(\beta) \Rightarrow \frac{\ln \alpha}{\alpha} > \frac{\ln \beta}{\beta} \xRightarrow{\alpha, \beta > 0} \beta \ln \alpha > \alpha \ln \beta$

23.25 2)

Έχουμε ισοδύναμα $e^a - e^b < a - b \Leftrightarrow e^a - a < e^b - b$.

Οπότε θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = e^x - x$, $x \in [0, +\infty)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $h'(x) = e^x - 1$

Οπότε για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είναι $h'(x) \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 0$. Οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$\boxed{\alpha < \beta} \xRightarrow{h'} h(\alpha) < h(\beta) \Rightarrow e^a - a < e^b - b \Rightarrow \boxed{e^a - e^b < a - b}$$

23.25 3)

Έχουμε ισοδύναμα $\frac{\ln \alpha}{\beta} > \frac{\ln \beta}{\alpha} \xRightarrow{\alpha, \beta > 0} \alpha \ln \alpha > \beta \ln \beta$

Οπότε θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = x \ln x$, $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ με $h'(x) = \ln x + \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} = \ln x + 1$

Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ έχουμε

$x > \frac{1}{e} \Rightarrow \ln x > \ln \frac{1}{e} \Rightarrow \ln x > -1 \Rightarrow \ln x + 1 > 0 \Rightarrow h'(x) > 0$. Οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα

$\alpha > \beta \xRightarrow{h'} h(\alpha) > h(\beta) \Rightarrow \alpha \ln \alpha > \beta \ln \beta$ που είναι ισοδύναμη με την σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε

23.25 4)

Έχουμε ισοδύναμα

$$\frac{\beta^3 - \alpha^3}{3} \leq \frac{\beta^4 - \alpha^4}{4} \Leftrightarrow 4\beta^3 - 4\alpha^3 \leq 3\beta^4 - 3\alpha^4 \Leftrightarrow 4\beta^3 - 3\beta^4 \leq 4\alpha^3 - 3\alpha^4.$$

Οπότε θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = 4x^3 - 3x^4$, $x \in [1, +\infty)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με $h'(x) = 12x^2 - 12x^3 = 12x^2(1 - x)$

Οπότε για κάθε $x \in [1, +\infty)$ είναι $h'(x) \leq 0$, με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 1$. Οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα

$$\boxed{\beta \geq \alpha} \xrightarrow{h} h(\beta) \leq h(\alpha) \Rightarrow 4\beta^3 - 3\beta^4 \leq 4\alpha^3 - 3\alpha^4 \Rightarrow 4\beta^3 - 4\alpha^3 \leq 3\beta^4 - 3\alpha^4$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\beta^3 - \alpha^3}{3} \leq \frac{\beta^4 - \alpha^4}{4}}$$

23.25 5)

Έχουμε ισοδύναμα $\alpha^2 e^{-\beta} > \beta^2 e^{-\alpha} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{e^\beta} > \frac{\beta^2}{e^\alpha} \Leftrightarrow \alpha^2 e^\alpha > \beta^2 e^\beta$

Οπότε θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = x^2 e^x$, $x \in (-2, +\infty)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, +\infty)$ με $h'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = xe^x(2+x)$

Οπότε για κάθε $x \in (-2, +\infty)$ είναι $h'(x) > 0$. Οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-2, +\infty)$. Άρα

$\alpha > \beta \xrightarrow{h} h(\alpha) > h(\beta) \Rightarrow \alpha^2 e^\alpha > \beta^2 e^\beta \Rightarrow \frac{\alpha^2}{e^\beta} > \frac{\beta^2}{e^\alpha} \Rightarrow \alpha^2 e^{-\beta} > \beta^2 e^{-\alpha}$ που είναι ισοδύναμη με την σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε

23.25 6)

Έχουμε ισοδύναμα

$$e^a \beta^2 - e^b > e^b \alpha^2 - e^a \Leftrightarrow e^a \beta^2 + e^a > e^b \alpha^2 + e^b \Leftrightarrow e^a (\beta^2 + 1) > e^b (\alpha^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^a}{\alpha^2 + 1} > \frac{e^b}{\beta^2 + 1}$$

Οπότε θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με

$$h'(x) = \frac{e^x(x^2 + 1) - e^x 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^x(x^2 + 1 - 2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^x(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h'(x) \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 1$. Οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα

$\alpha > \beta \xrightarrow{h} h(\alpha) > h(\beta) \Rightarrow \frac{e^a}{\alpha^2 + 1} > \frac{e^b}{\beta^2 + 1}$ που είναι ισοδύναμη με την σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε

23.25 7)

Έχουμε ισοδύναμα $\alpha^3 + \alpha^3 \beta^2 > \beta^3 + \beta^3 \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^3(1 + \beta^2) > \beta^3(1 + \alpha^2) \xrightarrow[1+\beta^2>0]{1+\alpha^2>0} \frac{\alpha^3}{1 + \alpha^2} > \frac{\beta^3}{1 + \beta^2}$

Οπότε θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} \geq 0$$

Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h'(x) \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 0$. Οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα

$\alpha > \beta \xRightarrow{h'} h(\alpha) > h(\beta) \Rightarrow \frac{\alpha^3}{\alpha^2+1} > \frac{\beta^3}{\beta^2+1}$ που είναι ισοδύναμη με την σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε

23.25 8)

Έχουμε ισοδύναμα

$$\beta^2 - \alpha^2 < \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow \beta^2 - \alpha^2 < 2\ln\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \beta^2 - \alpha^2 < 2(\ln\beta - \ln\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 - \alpha^2 < 2\ln\beta - 2\ln\alpha \Leftrightarrow 2\ln\alpha - \alpha^2 < 2\ln\beta - \beta^2$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $\boxed{2\ln\alpha - \alpha^2 < 2\ln\beta - \beta^2}$ για αν $1 < \beta < \alpha$. Οπότε

θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = 2\ln x - x^2$, $x > 1$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $h'(x) = \frac{2}{x} - 2x = \frac{2-2x^2}{x} = \frac{2(1-x^2)}{x}$

Προφανώς για κάθε $x > 1$ είναι $h'(x) < 0$ οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$. Άρα

$$1 < \boxed{\beta < \alpha} \xRightarrow{h} h(\beta) > h(\alpha) \Rightarrow \boxed{2\ln\beta - \beta^2 > 2\ln\alpha - \alpha^2}$$

23.25 9)

Έχουμε ισοδύναμα

$$e^{a-\beta} > \frac{1+\alpha}{1+\beta} \Leftrightarrow \frac{e^a}{e^\beta} > \frac{1+\alpha}{1+\beta} \xRightarrow{e^\beta > 0, 1+\alpha > 0} \frac{e^a}{1+\alpha} > \frac{e^\beta}{1+\beta}$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $\boxed{\frac{e^a}{1+\alpha} > \frac{e^\beta}{1+\beta}}$ για $\alpha > \beta > 0$. Οπότε

θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \frac{e^x}{1+x}$, $x > 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$h'(x) = \frac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2} = \frac{e^x(x+x-1)}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$$

Προφανώς για κάθε $x > 0$ είναι $h'(x) > 0$

οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Άρα

$$0 < \boxed{\beta < \alpha} \xRightarrow{h} h(\beta) < h(\alpha) \Rightarrow \boxed{\frac{e^\beta}{1+\beta} < \frac{e^\alpha}{1+\alpha}}$$