

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

23.23 1)

α) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \ln x - x + 1$ με $D_f = [1, +\infty)$

(Λεπτομέρεια: το πεδίο ορισμού είναι το $[1, +\infty)$ και όχι το $(1, +\infty)$)

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

Για κάθε $x > 1$ είναι $1-x < 0 \Rightarrow \frac{1-x}{x} < 0 \Rightarrow h'(x) < 0$, οπότε η h είναι γνησίως

φθίνουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα

$$x \geq 1 \Rightarrow h(x) \leq h(1) \Rightarrow \ln x - x + 1 \leq \ln 1 - 1 + 1 \Rightarrow \ln x \leq x - 1$$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = e^{2-x} + 1 - x$ με $D_f = [2, +\infty)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[2, +\infty)$ με $h'(x) = -e^{2-x} - 1$

Προφανώς είναι $h'(x) < 0$ για κάθε $x \in [2, +\infty)$, οπότε η h είναι γνησίως

φθίνουσα στο $[2, +\infty)$. Άρα

$$x > 2 \Rightarrow h(x) < h(2) \Rightarrow e^{2-x} + 1 - x < e^{2-2} + 1 - 2 \Rightarrow e^{2-x} + 1 - x < 0$$

23.23 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = e^x - x - 1$, $x \geq 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $h'(x) = e^x - 1$

Για κάθε $x > 0$ είναι $e^x > 1 \Rightarrow e^x - 1 > 0 \Rightarrow h'(x) > 0$, οπότε η h είναι γνησίως

αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$\boxed{x \geq 0} \Rightarrow h(x) \geq h(0) \Rightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Rightarrow \boxed{e^x \geq x + 1}$$

23.23 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \frac{1}{e^x} - 1 + x$, $x \geq 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $h'(x) = -e^{-x} + 1$

Για κάθε $x > 0$ είναι $-x < 0 \Rightarrow e^{-x} < 1 \Rightarrow 1 - e^{-x} > 0 \Rightarrow h'(x) > 0$, οπότε η h είναι

γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$\boxed{x > 0} \Rightarrow h(x) > h(0) \Rightarrow \frac{1}{e^x} - 1 + x > 0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{e^x} > 1 - x}$$

23.23 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = e^x - ex$, $x \geq 1$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με $h'(x) = e^x - e$

Για κάθε $x > 1$ είναι $e^x > e^1 \Rightarrow e^x - e > 0 \Rightarrow h'(x) > 0$, οπότε η h είναι γνησίως

αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα

$$\boxed{x > 1} \Rightarrow h(x) > h(1) \Rightarrow e^x - e > 0 \Rightarrow \boxed{e^x > e}$$

23.23 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = xe^{x-1} - 1$ με $D_f = [1, +\infty)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με $h'(x) = e^{x-1} + xe^{x-1}$.

Για κάθε $x > 1$ προφανώς είναι $h'(x) > 0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα

$$x > 1 \xRightarrow{h'} h(x) > h(1) \Rightarrow xe^{x-1} - 1 > 1 \cdot e^{1-1} - 1 \Rightarrow xe^{x-1} - 1 > 0 \Rightarrow xe^{x-1} > 1$$

23.23 6)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = (1-x)e^x - 1$ με $D_f = [0, +\infty)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με

$$h'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -\cancel{e^x} + \cancel{e^x} - xe^x = -xe^x.$$

Για κάθε $x > 0$ προφανώς είναι $h'(x) < 0$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$x > 0 \xRightarrow{h} h(x) < h(0) \Rightarrow (1-x)e^x - 1 < (1-0)e^0 - 1 \Rightarrow (1-x)e^x - 1 < 0 \Rightarrow (1-x)e^x < 1$$

23.23 7)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \ln x + 2x - 2$ με $D_f = [1, +\infty)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με $h'(x) = \frac{1}{x} + 2$.

Για κάθε $x > 1$ προφανώς είναι $h'(x) > 0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα

$$x \geq 1 \xRightarrow{h'} h(x) \geq h(1) \Rightarrow \ln x + 2x - 2 \geq \ln 1 + 2 \cdot 1 - 2 \Rightarrow \ln x + 2x - 2 \geq 0 \Rightarrow \ln x + 2x \geq 2$$

23.23 8)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = x - \ln(1+x)$, $x \geq 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $h'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$

Για κάθε $x > 0$ προφανώς είναι $h'(x) > 0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$\boxed{x > 0} \xRightarrow{h'} h(x) > h(0) \Rightarrow x - \ln(1+x) > 0 \Rightarrow \boxed{x > \ln(1+x)}$$

23.23 9)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \varepsilon\phi x - x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $h'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}$

Για κάθε $x > 0$ προφανώς είναι $h'(x) > 0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$\boxed{x > 0} \xRightarrow{h'} h(x) > h(0) \Rightarrow \varepsilon\phi x - x > 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon\phi x > x}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$, $x \geq 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με

$$h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{\cancel{x} + 1 - \cancel{x}}{(x+1)^2} = \frac{x + \cancel{1} - \cancel{1}}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

Για κάθε $x > 0$ προφανώς είναι $h'(x) > 0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$\boxed{x > 0} \stackrel{h'}{\Rightarrow} h(x) > h(0) \Rightarrow \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} > 0 \Rightarrow \boxed{\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \frac{1}{x} + \varepsilon\varphi \frac{1}{x}$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$ με

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{x}}\right)$$

Για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$ προφανώς είναι $h'(x) < 0$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$. Άρα

$$\boxed{x \geq \frac{4}{\pi}} \stackrel{h}{\Rightarrow} h(x) \leq h\left(\frac{4}{\pi}\right) \Rightarrow \frac{1}{x} + \varepsilon\varphi \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\frac{4}{\pi}} + \varepsilon\varphi \frac{1}{\frac{4}{\pi}} \Rightarrow \frac{1}{x} + \varepsilon\varphi \frac{1}{x} \leq \frac{\pi}{4} + \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{x} + \varepsilon\varphi \frac{1}{x} \leq \frac{\pi}{4} + \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4}}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$, $x \geq 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με

$$h'(x) = 1 - x - \frac{1}{x+1} = \frac{x + \cancel{1} - x(x+1) - \cancel{1}}{x+1} = \frac{\cancel{x} + \cancel{1} - x^2 - \cancel{x} - \cancel{1}}{x+1} = -\frac{x^2}{x+1}$$

Προφανώς είναι $h'(x) < 0$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$\boxed{x \geq 0} \stackrel{h}{\Rightarrow} h(x) \leq h(0) \Rightarrow x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x) \leq 0 - \frac{0^2}{2} - \ln(1+0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x) \leq 0 \Rightarrow x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \ln(x^2+1) - x$, $x \geq 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με

$$h'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - 1 = \frac{2x - x^2 - 1}{x^2+1} = \frac{-(x^2 - 2x + 1)}{x^2+1} = -\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

Προφανώς για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είναι $h'(x) \leq 0$ (η ισότητα ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x_0 = 1$), οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$\begin{aligned} x \geq 0 &\stackrel{h \searrow}{\Rightarrow} h(x) \leq h(0) \Rightarrow \ln(x^2+1) - x \leq \ln(0^2+1) - 0 \Rightarrow \ln(x^2+1) - x \leq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln(x^2+1) \leq x \end{aligned}$$

23.23 14)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = 1 - \frac{1}{x} - \ln x$, $x \geq 1$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με $h'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x^2}$

Προφανώς για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $h'(x) < 0$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα

$$x \geq 1 \stackrel{h \searrow}{\Rightarrow} h(x) \leq h(1) \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} - \ln x \leq 1 - \frac{1}{1} - \ln 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} - \ln x \leq 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x$$

23.23 15)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = e^{x-1} - \ln x - 1$, $x \geq 1$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με $h'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{xe^{x-1} - 1}{x}$ (1)

Για κάθε $x > 1$ είναι

$$x - 1 > 0 \Rightarrow e^{x-1} > e^0 \Rightarrow e^{x-1} > 1 \left\{ \begin{array}{l} \text{πολλαπλασιάζουμε} \\ \text{κατά μέλη} \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x > 1 \\ x > 1 \end{array} \right\} \Rightarrow xe^{x-1} > 1 \Rightarrow xe^{x-1} - 1 > 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} h'(x) > 0$$

Οπότε για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $h'(x) > 0$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα

$$\begin{aligned} x > 1 &\stackrel{h \nearrow}{\Rightarrow} h(x) > h(1) \Rightarrow e^{x-1} - \ln x - 1 > e^{1-1} - \ln 1 - 1 \Rightarrow e^{x-1} - \ln x - 1 > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{x-1} > \ln x + 1 \end{aligned}$$

23.23 16)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = 4\eta\mu x - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - 3x$, με $D_f = [0, +\infty)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με

$$\begin{aligned} h'(x) &= 4\sigma\upsilon\nu x - (\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x) - 3 = 4\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x - 3 = \\ &= 4\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x - 3 = -2\sigma\upsilon\nu^2 x + 4\sigma\upsilon\nu x - 2 = -2(\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x + 1) = \\ &= -2(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 \end{aligned}$$

Προφανώς για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είναι $h'(x) \leq 0$, (η ισότητα ισχύει μεμονωμένα για $x = 2k\pi$) οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$x > 0 \stackrel{h \searrow}{\Rightarrow} h(x) < h(0) \Rightarrow 4\eta\mu x - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - 3x < 4\eta\mu 0 - \eta\mu 0 \cdot \sigma\upsilon\nu 0 - 3 \cdot 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\eta\mu x - \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu x - 3x < 0 \Rightarrow 4\eta\mu x - \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu x < 3x$$

23.23 17)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = e^x - 1 - \ln(1+x)$, $x \geq 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και για κάθε $x \geq 0$ είναι

$$h'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} = \frac{xe^x + e^x - 1}{x+1}$$

Επειδή $x \geq 0 \Rightarrow e^x - 1 \geq 0 \Rightarrow \overset{xe^x \geq 0}{xe^x + e^x - 1} \geq 0 \Rightarrow \overset{x+1 > 0}{\frac{xe^x + e^x - 1}{x+1}} \geq 0 \Rightarrow h'(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 0$

οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$x > 0 \Rightarrow \overset{h'}{h}(x) > h(0) \Rightarrow e^x - 1 - \ln(1+x) > e^0 - 1 - \ln(1+0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x - 1 - \ln(1+x) > 0 \Rightarrow \boxed{e^x > 1 + \ln(1+x)}$$