

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

23.21 1)

- α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x} > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$
- β) Έχουμε ότι
 $0 < \alpha < \beta \xRightarrow{f \nearrow} f(\alpha) < f(\beta) \Rightarrow \ln \alpha + \alpha < \ln \beta + \beta \Rightarrow \ln \alpha - \ln \beta < \beta - \alpha \Rightarrow \ln \frac{\alpha}{\beta} < \beta - \alpha$
- γ) Έχουμε ότι $x \geq 1 \xRightarrow{f \nearrow} f(x) \geq f(1) \Rightarrow \ln x + x \geq \ln 1 + 1 \Rightarrow \ln x + x \geq 1$
- δ) Έχουμε ότι $x > 0$
 $\left. \begin{aligned} \ln x + x < \ln 5 + 5 \Rightarrow f(x) < f(5) \end{aligned} \right\} \xRightarrow{f \nearrow} x < 5 \Rightarrow 0 < x < 5$

23.21 2)

- α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \sin x - 1 \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει σε μεμονωμένα σημεία για $x = 2k\pi$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
- β) Έχουμε ότι $\alpha > \beta \xRightarrow{f \searrow} f(\alpha) < f(\beta) \Rightarrow \eta \mu \alpha - \alpha < \eta \mu \beta - \beta \Rightarrow \eta \mu \alpha - \eta \mu \beta < \alpha - \beta$
- γ) Έχουμε ότι $x > 0 \xRightarrow{f \searrow} f(x) < f(0) \Rightarrow \eta \mu x - x < \eta \mu 0 - 0 \Rightarrow \eta \mu x - x < 0 \Rightarrow \eta \mu x < x$
- δ) Έχουμε ότι $\eta \mu x - x \leq \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} \Rightarrow f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right) \xRightarrow{f \searrow} x \geq \frac{\pi}{6}$

23.21 3)

- α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{2}{x+1} + 2x - 2 = \frac{\cancel{2} + 2x^2 - \cancel{2x} + \cancel{2x} - \cancel{2}}{x+1} = \frac{2x^2}{x+1}$$
 Άρα $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$, με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$
- β) Έχουμε ότι
 $-1 < \alpha < \beta \xRightarrow{f \nearrow} f(\alpha) < f(\beta) \Rightarrow 2 \ln(\alpha+1) + \alpha^2 - 2\alpha < 2 \ln(\beta+1) + \beta^2 - 2\beta \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2 \ln(\alpha+1) - 2 \ln(\beta+1) < \beta^2 - 2\beta - \alpha^2 + 2\alpha \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2 \left[\ln(\alpha+1) - \ln(\beta+1) \right] < \beta^2 - \alpha^2 - 2\beta + 2\alpha \Rightarrow 2 \ln \frac{\alpha+1}{\beta+1} < \beta^2 - \alpha^2 - 2\beta + 2\alpha$
- γ) Έχουμε ότι
 $x \geq 2 \xRightarrow{f \nearrow} f(x) \geq f(2) \Rightarrow 2 \ln(x+1) + x^2 - 2x \geq 2 \ln(2+1) + 2^2 - 2 \cdot 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2 \ln(x+1) + x^2 - 2x \geq 2 \ln 3$

δ) Έχουμε ότι $2 \ln(x+1) + x^2 - 2x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow \boxed{x > 0}$

23.21 4)

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x + \cancel{e^x} - \cancel{e^x}}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

Άρα $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$, με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

β) Έχουμε ότι $\alpha > \beta > 0 \Rightarrow f(\alpha) > f(\beta) \Rightarrow \frac{e^\alpha}{1+\alpha} > \frac{e^\beta}{1+\beta} \Rightarrow \frac{e^\alpha}{e^\beta} > \frac{1+\alpha}{1+\beta} \Rightarrow \boxed{e^{\alpha-\beta} > \frac{1+\alpha}{1+\beta}}$

γ) Έχουμε ότι $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow \frac{e^x}{1+x} > \frac{e^0}{1+0} \Rightarrow \frac{e^x}{1+x} > 1 \Rightarrow \boxed{e^x > 1+x}$

δ) Έχουμε ότι

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \frac{e^x}{1+x} \leq \frac{e^{2x-1}}{2x} \Rightarrow f(x) \leq f(2x-1) \Rightarrow x \leq 2x-1 \Rightarrow -x \leq -1 \Rightarrow x \geq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x \geq 1}$$

23.21 5)

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f'(x) = e^x + xe^x + 1$

Επειδή $x \in [0, +\infty)$ θα είναι $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

β) Έχουμε ότι $0 < \alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta) \Rightarrow \alpha e^\alpha + \alpha < \beta e^\beta + \beta \Rightarrow \boxed{\alpha e^\alpha - \beta e^\beta < \beta - \alpha}$

γ) Έχουμε ότι $x \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq f(1) \Rightarrow xe^x + x \geq 1 \cdot e^1 + 1 \Rightarrow \boxed{xe^x + x \geq e^1 + 1}$

δ) Έχουμε ότι

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ (x-2)e^{x-2} + x - 2 > 0 \Rightarrow f(x) > f(2) \Rightarrow x > 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x > 2}$$