

23.20 1)

Η f ορίζεται για $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$, δηλαδή το πεδίο ορισμού της f είναι το $[1, +\infty)$

- Καταρχήν θα εξετάσουμε αν η f είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή αν είναι 1-1

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ (στο $x_0 = 1$ δεν είναι παραγωγίσιμη, αλλά

είναι συνεχής), με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0$, για κάθε $x > 1$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, άρα είναι και 1-1

- Τώρα θα βρούμε το πεδίο ορισμού της f^{-1} (δηλαδή το σύνολο τιμών της f)

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ θα έχει σύνολο τιμών το

$$f(A) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1, +\infty). \text{ Άρα το πεδίο ορισμού της } f^{-1} \text{ θα είναι το } A_{f^{-1}} = [1, +\infty)$$

- Τέλος θα βρούμε και τον τύπο της αντίστροφης.

Έχουμε

$$f(x) = y \Rightarrow 1 + \sqrt{x-1} = y \Rightarrow \sqrt{x-1} = y-1 \Rightarrow x-1 = (y-1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = (y-1)^2 + 1, \text{ και άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι}$$

$$f^{-1}(x) = (x-1)^2 + 1 \text{ με πεδίο ορισμού το } A_{f^{-1}} = [1, +\infty)$$

23.20 2)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 3$

Προφανώς είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και 1-1 οπότε η f είναι αντιστρέψιμη

Ακόμη επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα έχει σύνολο τιμών το

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}. \text{ Άρα το πεδίο ορισμού της } f^{-1} \text{ θα είναι το } A_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

Θα βρούμε και τον τύπο της αντίστροφης.

Έχουμε

$$f(x) = y \Rightarrow 3x - 9 = y \Rightarrow 3x = y + 9 \Rightarrow x = \frac{y+9}{3}$$

και άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $f^{-1}(x) = \frac{x+9}{3}$ με πεδίο ορισμού

$$\text{το } A_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

23.20 3)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Όμως δεν είναι 1-1 διότι πχ

$$f(x) = -2 \Rightarrow \frac{x-2}{x^2+5} = -\frac{2}{5} \Rightarrow 2x^2 + 10 = -5x + 10 \Rightarrow 2x^2 = -5x \Rightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } x = \frac{2}{5} \text{ δηλαδή } f(0) = f\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5}$$

23.20 4)

Η f ορίζεται όταν $x \geq 0$ και $\sqrt{x} + 2 \neq 0$ (που ισχύει πάντα), οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $[0, +\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ (στο $x_0 = 0$ δεν είναι παραγωγίσιμη, αλλά είναι συνεχής), με

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} + 2) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 4)}{(\sqrt{x} + 2)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\cancel{\sqrt{x}} + 2 - \cancel{\sqrt{x}} + 4)}{(\sqrt{x} + 2)^2} = \frac{6}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)^2}$$

Προφανώς είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, άρα είναι και 1-1 οπότε η f είναι αντιστρέψιμη

Ακόμη επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ θα έχει σύνολο τιμών το

$$f(0) = \frac{\sqrt{0}-4}{\sqrt{0}+2} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}}\left(1-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)}{\cancel{\sqrt{x}}\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} = 1$$

$f(A) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-2, 1)$. Άρα το πεδίο ορισμού της f^{-1} θα είναι το $A_{f^{-1}} = [-2, 1)$

Θα βρούμε και τον τύπο της αντίστροφης.

Έχουμε

$$f(x) = y \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+2} = y \Rightarrow \sqrt{x}-4 = y(\sqrt{x}+2) \Rightarrow \sqrt{x}-4 = y\sqrt{x}+2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} - y\sqrt{x} = 2y + 4 \Rightarrow \sqrt{x}(1-y) = 2y + 4 \xrightarrow[y \neq 1]{y \in [-2, 1)} \sqrt{x} = \frac{2y+4}{1-y} \Rightarrow x = \left(\frac{2y+4}{1-y} \right)^2$$

και άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $f^{-1}(x) = \left(\frac{2x+4}{1-x} \right)^2$ με πεδίο ορισμού το $A_{f^{-1}} = [-2, 1)$

23.20 5)

Η f ορίζεται όταν $x > 2$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $(2, +\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$, με $f'(x) = -\frac{1}{x-2}$

Επειδή $x > 2$ είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 2$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2, +\infty)$, άρα είναι και 1-1 οπότε η f είναι αντιστρέψιμη

Ακόμη επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2, +\infty)$ θα έχει σύνολο τιμών το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (5 - \ln(x-2)) = 5 - (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (5 - \ln(x-2)) = 5 - (-\infty) = +\infty$$

$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Άρα το πεδίο ορισμού της f^{-1} θα είναι το $A_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

Θα βρούμε και τον τύπο της αντίστροφης.

Έχουμε

$$f(x) = y \Rightarrow 5 - \ln(x-2) = y \Rightarrow \ln(x-2) = 5-y \Rightarrow x-2 = e^{5-y} \Rightarrow x = e^{5-y} + 2$$

και άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $f^{-1}(x) = e^{5-x} + 2$ με πεδίο ορισμού το $A_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

23.20 6)

Η f ορίζεται όταν $x \geq 0$ και $4 + \sqrt{x} \geq 0$ (που ισχύει πάντα), οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $[0, +\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ (στο $x_0 = 0$ δεν είναι παραγωγίσιμη, αλλά είναι συνεχής), με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4+\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Προφανώς είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, άρα είναι και 1-1 οπότε η f είναι αντιστρέψιμη

Ακόμη επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ θα έχει σύνολο τιμών το

$$f(0) = \sqrt{4+\sqrt{0}} = 2$$

$f(A) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left[2, +\infty \right)$. Άρα το πεδίο ορισμού της f^{-1} θα είναι το $A_{f^{-1}} = [2, +\infty)$

Θα βρούμε και τον τύπο της αντίστροφης.

Έχουμε

$$f(x) = y \Rightarrow \sqrt{4+\sqrt{x}} = y \Rightarrow 4 + \sqrt{x} = y^2 \Rightarrow \sqrt{x} = y^2 - 4 \xRightarrow[y^2 - 4 \geq 0]{y \in [2, +\infty)} x = (y^2 - 4)^2$$

και άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $f^{-1}(x) = (x^2 - 4)^2$ με πεδίο ορισμού το $A_{f^{-1}} = [2, +\infty)$

23.20 7)

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$

- Καταρχήν θα εξετάσουμε αν η f είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή αν είναι 1-1

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 2e^{2x-1} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και 1-1

- Τώρα θα βρούμε το πεδίο ορισμού της f^{-1} (δηλαδή το σύνολο τιμών της f)

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα έχει σύνολο τιμών το

$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x-1} + \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 = 0+3=3, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x-1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = +\infty+3=+\infty \right)$. Άρα το πεδίο ορισμού της f^{-1} θα είναι το $A_{f^{-1}} = (3, +\infty)$

- Τέλος θα βρούμε και τον τύπο της αντίστροφης.

Έχουμε

$$f(x) = y \Rightarrow e^{2x-1} + 3 = y \Rightarrow e^{2x-1} = y - 3 \Rightarrow 2x - 1 = \ln(y - 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = 1 + \ln(y - 3) \Rightarrow x = \frac{1 + \ln(y - 3)}{2}, \text{ και άρα ο τύπος της αντίστροφης}$$

συνάρτησης είναι

$$f^{-1}(x) = \frac{1 + \ln(x-3)}{2} \text{ με πεδίο ορισμού το } A_{f^{-1}} = (3, +\infty)$$

23.20 8)

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$

- Καταρχήν θα εξετάσουμε αν η f είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή αν είναι 1-1

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x + 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(\cancel{e^x} + 1 - \cancel{e^x} - 4)}{(e^x + 1)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x + 1)^2} < 0, \text{ για κάθε}$$

$x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και 1-1

- Τώρα θα βρούμε το πεδίο ορισμού της f^{-1} (δηλαδή το σύνολο τιμών της f)

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ θα έχει σύνολο τιμών το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 4}{e^x + 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \left(1, 4 \right). \text{ Άρα το πεδίο ορισμού}$$

της f^{-1} θα είναι το $A_{f^{-1}} = (1, 4)$

- Τέλος θα βρούμε και τον τύπο της αντίστροφης.

Έχουμε

$$f(x) = y \Rightarrow \frac{e^x + 4}{e^x + 1} = y \Rightarrow e^x + 4 = (e^x + 1)y \Rightarrow e^x + 4 = ye^x + y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x - ye^x = y - 4 \Rightarrow e^x(1 - y) = y - 4 \Rightarrow e^x = \frac{y - 4}{1 - y} \Rightarrow x = \ln \frac{y - 4}{1 - y}, \text{ και άρα ο}$$

τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι

$$f^{-1}(x) = \ln \frac{x - 4}{1 - x} \text{ με πεδίο ορισμού το } A_{f^{-1}} = (1, 4)$$

23.20 9)

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$ (διότι $e^x + 1 > 0$)

- Καταρχήν θα εξετάσουμε αν η f είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή αν είναι 1-1

$$\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R}, \text{ με } f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ οπότε η } f$$

είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και 1-1

- Τώρα θα βρούμε το πεδίο ορισμού της f^{-1} (δηλαδή το σύνολο τιμών της f)

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα έχει σύνολο τιμών το

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) = \ln(0 + 1) = 0$$

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left(0, +\infty \right). \text{ Άρα το πεδίο}$$

ορισμού της f^{-1} θα είναι το $A_{f^{-1}} = (0, +\infty)$

- Τέλος θα βρούμε και τον τύπο της αντίστροφης.

Έχουμε

$$f(x) = y \Rightarrow \ln(e^x + 1) = y \Rightarrow e^x + 1 = e^y \Rightarrow e^x = e^y - 1 \Rightarrow x = \ln(e^y - 1),$$

και άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι

$$f^{-1}(x) = \ln(e^x - 1), \text{ με πεδίο ορισμού το } A_{f^{-1}} = (0, +\infty)$$

