

23.19 1)

Πρέπει $\frac{1+x}{1-x} > 0 \Rightarrow (1+x)(1-x) > 0 \Rightarrow -1 < x < 1$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το

$A = (-1, 1)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$, με

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1-x + 1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{\cancel{1-x}(1-x)(1+x)} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$$

Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, 1)$,

$$\text{άρα } \boxed{f(A)} = \left(\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) \overset{\text{επεξήγηση 1}}{=} \overset{\text{επεξήγηση 2}}{=} (-\infty, +\infty) = \boxed{\mathbb{R}}$$

Επεξήγηση 1

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln \frac{1+x}{1-x} \overset{\text{θέτουμε } y = \frac{1+x}{1-x} \text{ όταν } x \rightarrow -1^+ \text{ τότε } y \rightarrow 0^+}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty$$

Επεξήγηση 2

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \frac{1+x}{1-x} \overset{\text{θέτουμε } y = \frac{1+x}{1-x} \text{ όταν } x \rightarrow 1^- \text{ τότε } y \rightarrow +\infty}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = +\infty$$

23.19 2)

Πρέπει $\frac{x}{2-x} > 0 \Rightarrow x(2-x) > 0 \Rightarrow 0 < x < 2$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το

$A = (0, 2)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$, με

$$f(x) = \ln \frac{x}{2-x} \quad f'(x) = \frac{1}{\frac{x}{2-x}} \cdot \frac{2-x + x}{(2-x)^2} = \frac{2}{\cancel{2-x}x(2-x)}$$

Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 2)$,

$$\text{άρα } \boxed{f(A)} = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \right) \overset{\text{επεξήγηση 1}}{=} \overset{\text{επεξήγηση 2}}{=} (-\infty, +\infty) = \boxed{\mathbb{R}}$$

Επεξήγηση 1

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{x}{2-x} \overset{\text{θέτουμε } y = \frac{x}{2-x} \text{ όταν } x \rightarrow 0^+ \text{ τότε } y \rightarrow 0^+}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty$$

Επεξήγηση 2

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \ln \frac{x}{2-x} \overset{\text{θέτουμε } y = \frac{x}{2-x} \text{ όταν } x \rightarrow 2^- \text{ τότε } y \rightarrow +\infty}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = +\infty$$

23.19 3)

Η έχει πεδίο ορισμού της το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{\cancel{e^{2x}} + e^x - \cancel{e^{2x}} + e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Προφανώς είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\cancel{x}} \left(1 - \frac{1}{\cancel{e^x}} \right)}{e^{\cancel{x}} \left(1 + \frac{1}{\cancel{e^x}} \right)} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$$\text{, άρα } \boxed{f(\mathbb{R})} = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \boxed{(-1, 1)}$$

23.19 4)

Η έχει πεδίο ορισμού της το $A = [0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ (στο $x_0 = 0$ δεν είναι παραγωγίσιμη, αλλά είναι συνεχής), με

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1) - \cancel{\sqrt{x}} \frac{1}{2\cancel{\sqrt{x}}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\frac{1}{2\cancel{\sqrt{x}}} \cancel{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}}{(\sqrt{x}+1)^2} =$$

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

Προφανώς είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}}^1}{\cancel{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \right)} = \frac{1}{0+1} = 1$$

$$[0, +\infty), \text{ άρα } \boxed{f(A)} = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)^{f(0)=1} = \boxed{[0, 1]}$$

23.19 5)

Η έχει πεδίο ορισμού της το $\mathbb{R}$ (το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει αρνητική διακρίνουσα). Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+x+1} - (2x+1) \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{\sqrt{x^2+x+1}^2} = \frac{4\sqrt{x^2+x+1}^2 - (2x+1)^2}{2\sqrt{x^2+x+1}^2} =$$

$$= \frac{4\sqrt{x^2+x+1}^2 - (2x+1)^2}{2\sqrt{x^2+x+1}^2} = \frac{4\sqrt{x^2+x+1}^2 - (2x+1)^2}{2\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{x^2+x+1}^2} =$$

$$= \frac{\cancel{4x^2} + \cancel{4x} + 4 - \cancel{4x^2} - \cancel{4x} - 1}{2\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{x^2+x+1}^2} = \frac{4}{2\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{x^2+x+1}^2}$$

Προφανώς είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(2 + \frac{1}{\cancel{x}} \right)}{-\cancel{x} \sqrt{1 + \frac{1}{\cancel{x}} + \frac{1}{\cancel{x}^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+0}{-\sqrt{1+0+0}} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(2 + \frac{1}{\cancel{x}} \right)}{\cancel{x} \sqrt{1 + \frac{1}{\cancel{x}} + \frac{1}{\cancel{x}^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+0}{\sqrt{1+0+0}} = 2$$

$$\text{, άρα } \boxed{f(\mathbb{R})} = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \boxed{(-2, 2)}$$

23.19 6)

Η έχει πεδίο ορισμού της το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}^2} = \frac{\sqrt{1+x^2} - x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

Προφανώς είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο

$$\mathbb{R}, \text{ άρα } \boxed{f(\mathbb{R})} = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \overset{\text{επεξήγηση 1}}{=} \overset{\text{επεξήγηση 2}}{=} \boxed{(0, 2)}$$

Επεξήγηση 1

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{\cancel{x}}{-\cancel{x}\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{0+1}} = 1 - 1 = 0$$

Επεξήγηση 2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} \right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{0+1}} = 1 + 1 = 2$$

23.19 7)

Η έχει πεδίο ορισμού της το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διότι

$$\text{Αν } x < 0 \text{ τότε προφανώς } x - \sqrt{x^2+1} < 0$$

Αν $x \geq 0$ τότε

$$x - \sqrt{x^2+1} < 0 \Leftrightarrow x < \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 < \sqrt{x^2+1}^2 \Leftrightarrow x^2 < x^2+1 \text{ που ισχύει}$$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα

$$\boxed{f(\mathbb{R})} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) \overset{\text{επεξήγηση 1}}{=} \overset{\text{επεξήγηση 2}}{=} \boxed{(0, +\infty)}$$

Επεξήγηση 1

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}^2 - x^2}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2}}{x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = \frac{1}{(+\infty)(\sqrt{1+0} + 1)} = \frac{1}{(+\infty) \cdot 2} = \\ &= \frac{1}{+\infty} = \boxed{0} \end{aligned}$$

Επεξήγηση 2

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) =$$

$$= (-\infty)(-\sqrt{1+0}-1) = (-\infty)(-1-1) = \boxed{+\infty}$$