

23.18 1)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1$

Προφανώς είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

$$\text{άρα } [f(A)] = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 \right) = (-\infty, +\infty) = \boxed{\mathbb{R}}$$

23.18 2)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = -3x^2 - 4$

Προφανώς είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$,

$$\text{άρα } [f(A)] = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3), \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) \right) = (-\infty, +\infty) = \boxed{\mathbb{R}}$$

23.18 3)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = -\frac{1}{x}$

Επειδή είναι $x > 0$ θα είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, άρα

$$[f(A)] = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (1 - (+\infty), 1 - (-\infty)) = (-\infty, +\infty) = \boxed{\mathbb{R}}$$

23.18 4)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = -e^{-x}$

Προφανώς είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$,

$$\text{άρα } [f(A)] = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (0 + 1, +\infty) = \boxed{(1, +\infty)}$$

23.18 5)

Η f έχει πεδίο ορισμού της το $[0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ (στο $x_0 = 0$ δεν είναι παραγωγίσιμη, αλλά είναι συνεχής), με $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + 1$

Προφανώς είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο

$$[0, +\infty), \text{ άρα } [f(A)] = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-1, +\infty)$$

23.18 6)

Η f έχει πεδίο ορισμού της το $[0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ (στο $x_0 = 0$ δεν είναι παραγωγίσιμη, αλλά είναι συνεχής), με $f'(x) = -1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Προφανώς είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο

$$[0, +\infty), \text{ άρα } [f(A)] = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(0) \right] = \boxed{(-\infty, 4]}$$

23.18 7)

Η f έχει πεδίο ορισμού της το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = e^x + 1$

Προφανώς είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x) = 0 - \infty = -\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x) = +\infty + \infty = +\infty$$

, άρα $\boxed{f(\mathbb{R})} = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \boxed{\mathbb{R}}$