

23.16 1)

α) Θέτουμε $f(x) = \ln(x+1) + x$, $x \in (-1, +\infty)$

Παρατηρούμε ότι η $x = 0$ είναι μία **προφανής ρίζα** διότι

$$f(0) = \ln(0+1) + 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

Ακόμη η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων

$$\text{συναρτήσεων, με } f'(x) = \frac{1}{x+1} + 1$$

Επειδή $x > -1$ είναι $f'(x) > 0$. Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$

και άρα είναι 1-1 επομένως έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα και επειδή όπως είδαμε έχει ρίζα το μηδέν συμπεραίνουμε τελικά ότι η f άρα και η εξίσωση

$$\ln(x+1) + x = 0 \text{ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν}$$

β) Θέτουμε $f(x) = e^{x+3} + x + 2$, $x \in \mathbb{R}$

Παρατηρούμε ότι η $x_0 = -3$ είναι μία **προφανής ρίζα** διότι

$$f(-3) = e^{-3+3} - 3 + 2 = 0$$

Ακόμη η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\text{, με } f'(x) = e^{x+3} + 1 \Rightarrow f'(x) > 0$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα είναι 1-1 επομένως έχει το

πολύ μία πραγματική ρίζα και επειδή όπως είδαμε έχει ρίζα το $x_0 = -3$

συμπεραίνουμε τελικά ότι η f άρα και η εξίσωση $e^{x+3} + x + 2 = 0$ έχει μοναδική ρίζα το $x_0 = -3$

23.16 2)

Θέτουμε $f(x) = 2 - x - 2\ln(x-1)$, $x \in (1, +\infty)$

Παρατηρούμε ότι η $\boxed{x=2}$ είναι μία προφανής ρίζα διότι

$$f(2) = 2 - 2 - 2\ln(2-1) \Rightarrow f(2) = 0$$

Ακόμη

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = -1 - \frac{2}{x-1} = \frac{-x+1-2}{x-1} = \frac{-x-1}{x-1} = -\frac{x+1}{x-1}$$

Επειδή $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$. Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$ και άρα

είναι 1-1 επομένως έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα και επειδή όπως είδαμε έχει ρίζα το 2 συμπεραίνουμε τελικά ότι η f άρα και η εξίσωση $2 - x = 2\ln(x-1)$ έχει μοναδική ρίζα το 2

23.16 3)

Θέτουμε $f(x) = x^2 + \ln(x-1) - 4$, $x \in (1, +\infty)$

Παρατηρούμε ότι η $\boxed{x=2}$ είναι μία προφανής ρίζα διότι

$$f(2) = 2^2 + \ln(2-1) - 4 \Rightarrow f(2) = 0$$

Ακόμη

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x-1}$$

Επειδή $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$. Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$ και

άρα είναι 1 - 1 επομένως έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα και επειδή όπως είδαμε έχει ρίζα το 2 συμπεραίνουμε τελικά ότι η f άρα και η εξίσωση $x^2 + \ln(x-1) = 4$ έχει μοναδική ρίζα το 2

23.16 4)

Θέτουμε $f(x) = x^3 + 2x - \eta\mu 2x$, $x \in \mathbb{R}$

Παρατηρούμε ότι η $\boxed{x=0}$ είναι μία προφανής ρίζα διότι

$$f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0 - \eta\mu 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

Ακόμη

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = 3x^2 + 2 - 2\sigma\upsilon\nu x = 3x^2 + 2(1 - \sigma\upsilon\nu x)$$

Επειδή $3x^2 \geq 0$ και $2(1 - \sigma\upsilon\nu x) \geq 0$ είναι $f'(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει

μεμονωμένα μόνο για $x = 0$. Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα είναι 1 - 1 επομένως έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα και επειδή όπως είδαμε έχει ρίζα το 0 συμπεραίνουμε τελικά ότι η f άρα και η εξίσωση $x^3 + 2x = \eta\mu 2x$ έχει μοναδική ρίζα το 0

23.16 5)

Θέτουμε $f(x) = e^{x-1} + \ln x - 1$, $x \in (0, +\infty)$

Παρατηρούμε ότι η $\boxed{x=1}$ είναι μία προφανής ρίζα διότι

$$f(1) = e^{1-1} + \ln 1 - 1 \Rightarrow f(1) = 0$$

Ακόμη

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x}$$

Επειδή $x > 0$ και $e^{x-1} > 0$ είναι $f'(x) > 0$. Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο

$(0, +\infty)$ και άρα είναι 1 - 1 επομένως έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα και επειδή όπως είδαμε έχει ρίζα το 1 συμπεραίνουμε τελικά ότι η f άρα και η εξίσωση $e^{x-1} + \ln x = 1$ έχει μοναδική ρίζα το 1

23.16 6)

Θέτουμε $f(x) = 1 + \ln(x+1) - \frac{1}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$

Παρατηρούμε ότι η $\boxed{x=0}$ είναι μία προφανής ρίζα διότι

$$f(0) = 1 + \ln(0+1) - \frac{1}{0+1} \Rightarrow f(0) = 0$$

Ακόμη

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$\text{με } f'(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x}$$

Επειδή $x > 0$ και $e^{x-1} > 0$ είναι $f'(x) > 0$. Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και άρα είναι $1 - 1$ επομένως έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα και επειδή όπως είδαμε έχει ρίζα το 0 συμπεραίνουμε τελικά ότι η f άρα και η εξίσωση

$$1 + \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} = 0 \text{ έχει μοναδική ρίζα το } 0$$

23.16 7)

Θέτουμε $f(x) = e^{-2x} - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

Παρατηρούμε ότι η $\boxed{x=0}$ είναι μία προφανής ρίζα διότι

$$f(0) = e^0 - 0 - 1 \Rightarrow f(0) = 0$$

Ακόμη

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x) = -2e^{-2x} - 1$

Επειδή $e^{-2x} > 0$ είναι $f'(x) < 0$. Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα είναι $1 - 1$ επομένως έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα και επειδή όπως είδαμε έχει ρίζα το 0 συμπεραίνουμε τελικά ότι η f άρα και η εξίσωση $e^{-2x} - x = 1$ έχει μοναδική ρίζα το 0

23.16 8)

Θέτουμε $f(x) = x + 1 + \ln(x^2 + 1) - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$

Παρατηρούμε ότι η $\boxed{x=0}$ είναι μία προφανής ρίζα διότι

$$f(0) = e^0 - 0 - 1 \Rightarrow f(0) = 0$$

Ακόμη

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x) = -2e^{-2x} - 1$

Επειδή $e^{-2x} > 0$ είναι $f'(x) < 0$. Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα είναι $1 - 1$ επομένως έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα και επειδή όπως είδαμε έχει ρίζα το 0 συμπεραίνουμε τελικά ότι η f άρα και η εξίσωση $x + 1 + \ln(x^2 + 1) - e^{-x} = 0$ έχει μοναδική ρίζα το 0