

23.15 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι πολυωνυμική περιττού βαθμού, άρα έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{R}$. Ακόμη η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 + 5$. Προφανώς είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και $1 - 1$, οπότε η ρίζα που έχει είναι μοναδική.

23.15 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = \eta\mu 0 + \sigma\upsilon\nu 0 - 2 \cdot 0 = 1 > 0 \\ f(\pi) = \eta\mu \pi + \sigma\upsilon\nu \pi - 2\pi = -1 - 2\pi < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(\pi) < 0$$

Οπότε, από το **θεώρημα Bolzano**, η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$

Ακόμη η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x - 2$. Επειδή

$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$ και $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$ θα είναι $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \leq 2$ και οπότε θα είναι

$f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και $1 - 1$, οπότε η ρίζα που έχει είναι μοναδική.

23.15 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 1 - \eta\mu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

και

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0 - 1 - \eta\mu 0 = -1 < 0 \\ f(\pi) = \pi^3 + 2\pi - 1 - \eta\mu 2\pi = \pi^3 + 2\pi - 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(\pi) < 0$$

Οπότε, από το **θεώρημα Bolzano**, η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$

Ακόμη η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 + 2 - 2\sigma\upsilon\nu 2x = 3x^2 + 2(1 - \sigma\upsilon\nu 2x)$

Επειδή $3x^2 \geq 0$ και $2(1 - \sigma\upsilon\nu 2x) \geq 0$, θα είναι $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και $1 - 1$, οπότε η ρίζα που έχει είναι μοναδική.

23.15 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - 2x - 3$, $x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, 0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} f(-2) = \alpha^{-2} - 2(-2) - 3 = \alpha^{-2} + 1 > 0 \\ f(0) = \alpha^0 - 2 \cdot 0 - 3 = -2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-2) \cdot f(0) < 0$$

Οπότε, από το **θεώρημα Bolzano**, η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-2, 0)$

Ακόμη η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = a^x \ln a - 2$

Επειδή $0 < a < 1$ είναι $\ln a < 0 \Rightarrow a^x \ln a < 0 \Rightarrow a^x \ln a - 2 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και $1 - 1$, οπότε η ρίζα που έχει είναι μοναδική

23.15 5)

Θέτουμε $f(x) = \ln(x-2) + x^2 - 10$, $x \in (2, +\infty)$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[3, 4]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= \ln(3-2) + 3^2 - 10 = \ln 1 + 9 - 10 < 0 \\ f(4) &= \ln(4-2) + 4^2 - 10 = \ln 2 + 16 - 10 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(3) \cdot f(4) < 0$$

Οπότε, από το **θεώρημα Bolzano**, η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(3, 4)$

Ακόμη η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{1}{x-2} + 2x \stackrel{x>2}{\Rightarrow} f'(x) > 0$ για κάθε $x > 2$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$ άρα και $1 - 1$, οπότε η ρίζα που έχει είναι μοναδική