

23.14 1)

Θέτουμε  $f(x) = \ln(x^2 + 1) + x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι το μηδέν είναι ρίζα της  $f$

Πράγματι

$$f(0) = \ln(0^2 + 1) + 0 \ln 1 = 0. \text{ Άρα το μηδέν είναι ρίζα της } f$$

Ακόμη

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} + 1 = \frac{2x + x^2 + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}$$

Προφανώς είναι  $f'(x) \geq 0$  με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για  $x = -1$ .

Οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και άρα είναι 1-1 επομένως έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα και επειδή όπως είδαμε έχει ρίζα το μηδέν συμπεραίνουμε τελικά ότι η  $f$  άρα και η εξίσωση  $\ln(x^2 + 1) + x = 0$  έχει μοναδική ρίζα το μηδέν

23.14 2)

Θέτουμε  $f(x) = \ln x + e^x - e$ ,  $x \in (0, +\infty)$

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι το  $x_0 = 1$  είναι ρίζα της  $f$

Πράγματι

$$f(1) = \ln 1 + e^1 - e = 0. \text{ Άρα το } x_0 = 1 \text{ είναι ρίζα της } f$$

Ακόμη

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{1}{x} + e^x$$

Προφανώς είναι  $f'(x) > 0$ . Οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και άρα είναι 1-1 επομένως έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα και επειδή όπως είδαμε έχει ρίζα το  $x_0 = 1$  συμπεραίνουμε τελικά ότι η  $f$  άρα και η εξίσωση  $\ln x + e^x = e$  έχει μοναδική ρίζα το  $x_0 = 1$

23.14 3)

Θέτουμε  $f(x) = \eta \mu x - x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι το μηδέν είναι ρίζα της  $f$

Πράγματι

$$f(0) = \eta \mu 0 - 0 = 0. \text{ Άρα το μηδέν είναι ρίζα της } f$$

Ακόμη

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \sigma \nu x - 1$$

Επειδή  $\sigma \nu x \leq 1$  είναι  $f'(x) \geq 0$  με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για  $x = -1$ . Οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και άρα είναι 1-1 επομένως έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα και επειδή όπως είδαμε έχει ρίζα το μηδέν συμπεραίνουμε τελικά ότι η  $f$  άρα και η εξίσωση  $\eta \mu x - x = 0$  έχει μοναδική ρίζα το μηδέν

Θέτουμε  $f(x) = e^{2-x} + 7 - x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι το  $x_0 = 2$  είναι ρίζα της  $f$

Πράγματι

$$f(2) = e^{2-2} + 7 - 2^3 = e^0 + 7 - 8 = 0. \text{ Άρα το } x_0 = 2 \text{ είναι ρίζα της } f$$

Ακόμη

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = -e^{2-x} - 3x^2$$

Προφανώς είναι  $f'(x) < 0$ . Οπότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$  και άρα είναι

$1-1$ , επομένως έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα και επειδή όπως είδαμε έχει ρίζα

το  $x_0 = 2$  συμπεραίνουμε τελικά ότι η  $f$  άρα και η εξίσωση  $e^{2-x} + 7 = x^3$  έχει

μοναδική ρίζα το  $x_0 = 2$