

23.12 1)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική, με $f'(x) = 7x^6 + 15x^4 + 3x^2 + 1$

Προφανώς είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα είναι 1 – 1 επομένως έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα

23.12 2)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = e^x(x^2 - 2x + 3) + e^x(2x - 2) = e^x(x^2 - \cancel{2x} + 3 + \cancel{2x} - 2) = e^x(x^2 + 1)$$

Προφανώς είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα είναι 1 – 1 επομένως έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα

23.12 3)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \sin x - \eta \mu x - 3$$

Επειδή είναι $\sin x \leq 1$ και $\eta \mu x \leq 1$ θα είναι $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα είναι 1 – 1 επομένως έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα

23.12 4)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(2, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$, ως πράξεις

$$\text{παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με } f'(x) = \frac{1}{x-2} + 6x^2 - 6x = \frac{1}{x-2} + 6x(x-1)$$

Επειδή $x > 2$ θα είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα είναι 1 – 1 επομένως είναι αντιστρέψιμη