

22.5 1)

Για $x > y$ έχουμε

$$0 \leq f(x) - f(y) \leq (x-y)^2 \xrightarrow{\text{διαφορούμε με } x-y>0} 0 \leq \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \leq \frac{(x-y)^2}{\cancel{x-y}} \Rightarrow$$

$$0 \leq \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \leq x-y$$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow y^+} 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow y^+} (x-y) = 0 \\ 0 \leq \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \leq x-y \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{κριτήριο παρεμβολής}} \lim_{x \rightarrow y^+} \frac{f(x) - f(y)}{x-y} = 0 \quad (1)$$

Ομοίως για $x < y$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow y^-} \frac{f(x) - f(y)}{x-y} = 0 \quad (2)$

$(1), (2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow y} \frac{f(x) - f(y)}{x-y} = 0 \Rightarrow \boxed{f'(y) = 0}$, για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

22.5 2)

Για κάθε $y \neq x$ έχουμε

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^3 \xrightarrow{\text{διαφορούμε με } |x-y|>0} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \right| \leq |x-y|^2 \Rightarrow$$

$$-|x-y|^2 \leq \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \leq |x-y|^2$$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow y} |x-y|^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow y} (-|x-y|^2) = 0 \\ -|x-y|^2 \leq \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \leq |x-y|^2 \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{κριτήριο παρεμβολής}} \lim_{x \rightarrow y} \frac{f(x) - f(y)}{x-y} = 0 \Rightarrow \boxed{f'(y) = 0}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$