

22.31

Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, $f(0) = 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)f(-x) = 1$ να αποδειχτεί ότι $f(x) = e^x$

$$f'(x)f(-x) = 1 \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } -x} f'(-x)f(x) = 1$$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} f'(x)f(-x) = 1 \\ f'(-x)f(x) = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{αφαιρούμε κατά μέλη}} f'(x)f(-x) - f'(-x)f(x) = 0 \Rightarrow [f(x)f(-x)]' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)f(-x) = c \quad (1)$$

$$(1) \xrightarrow{x=0} f(0)f(0) = c \xrightarrow{f(0)=1} c = 1 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow f(x)f(-x) = 1 \xrightarrow{f(x) \neq 0} f(-x) = \frac{1}{f(x)} \quad (3)$$

Επομένως

$$f'(x)f(-x) = 1 \xrightarrow{(3)} \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow f'(x) = f(x) \Rightarrow f'(x) - f(x) = 0 \xrightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } e^{-x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0 \Rightarrow [f(x)e^{-x}]' = 0 \Rightarrow f(x)e^{-x} = c_1 \Rightarrow f(x) = c_1 e^x \quad (4)$$

$$(4) \xrightarrow{x=0} f(0) = c_1 e^0 \xrightarrow{f(0)=1} c_1 = 1 \quad (5)$$

$$(4), (5) \Rightarrow \boxed{f(x) = e^x}$$