

22.3 1)

Θέτουμε $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f^3(x) + g^3(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο Δ , ως πράξεις παραγωγίσιμων, με

$$h'(x) = 3f^2(x)f'(x) + 3g^2(x)g'(x) \stackrel{\substack{f'(x)=g^2(x) \\ g'(x)=-f^2(x)}}{\Rightarrow} \Rightarrow$$

$$h'(x) = 3f^2(x)g^2(x) - 3g^2(x)f^2(x) \Rightarrow h'(x) = 0$$

οπότε σύμφωνα με γνωστή πρόταση η συνάρτηση h είναι σταθερή

δηλαδή υπάρχει σταθερός αριθμός c τέτοιος ώστε $h(x) = c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Όμως } h(x) = c \Rightarrow h(0) = c \Rightarrow f^3(0) + g^3(0) = c \stackrel{f(0)=g(0)=1}{\Rightarrow} 1+1 = c \Rightarrow c = 2$$

$$\text{Επομένως } h(x) = 2 \Rightarrow f^3(x) + g^3(x) = 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

22.3 2)

Θέτουμε $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f^2(x) - g^2(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων, με

$$h'(x) = 2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x) \stackrel{\substack{f'(x)=g(x) \\ g'(x)=f(x)}}{\Rightarrow} h'(x) = 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{h'(x) = 0}$$

οπότε σύμφωνα με γνωστή πρόταση η συνάρτηση h είναι σταθερή

δηλαδή υπάρχει σταθερός αριθμός c τέτοιος ώστε $h(x) = c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Όμως } h(x) = c \Rightarrow h(2) = c \Rightarrow [f(2)]^2 - [f'(2)]^2 = c \stackrel{\substack{f(2)=3 \\ g(2)=1}}{\Rightarrow} \boxed{c=8}$$

$$\text{Επομένως } h(x) = 8 \Rightarrow f^2(x) - g^2(x) = 8 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

22.3 3)

Θέτουμε $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων, με

$$h'(x) = 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) \stackrel{\substack{f''(x)+f(x)=0 \Rightarrow \\ f''(x)=-f(x)}}{\Rightarrow} h'(x) = 2f(x)f'(x) - 2f'(x)f(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{h'(x) = 0}$$

οπότε σύμφωνα με γνωστή πρόταση η συνάρτηση h είναι σταθερή

δηλαδή υπάρχει σταθερός αριθμός c τέτοιος ώστε $h(x) = c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Όμως } h(x) = c \Rightarrow h(1) = c \Rightarrow [f(1)]^2 + [f'(1)]^2 = c \stackrel{\substack{f(1)=-1 \\ f'(1)=2}}{\Rightarrow} \boxed{c=5}$$

$$\text{Επομένως } h(x) = 5 \Rightarrow [f(x)]^2 + [f'(x)]^2 = 5 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

22.3 4)

Θέτουμε $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) \cdot f(2x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων, με

$$h'(x) = f'(x) \cdot f(2x) + 2f(x) \cdot f'(2x) \xRightarrow{\substack{f'(x) \cdot f(2x) = -6 \\ f(x) \cdot f'(2x) = 3}} h'(x) = -6 + 2 \cdot 3 \Rightarrow h'(x) = 0$$

οπότε σύμφωνα με γνωστή πρόταση η συνάρτηση h είναι σταθερή

δηλαδή υπάρχει σταθερός αριθμός c τέτοιος ώστε $h(x) = c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Όμως } h(x) = c \Rightarrow h(0) = c \Rightarrow f(0) \cdot f(0) = c \xRightarrow{f(0)=2} \boxed{c=4}$$

Επομένως $h(x) = 4 \Rightarrow f(x) \cdot f(2x) = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

22.3 5)

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $w(x) = f^2(x) + g^2(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση w είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$w'(x) = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) \xRightarrow{\substack{f'(x)=g(x) \\ g'(x)=-f(x)}} w'(x) = 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w'(x) = 0 \Rightarrow w(x) = c \Rightarrow f^2(x) + g^2(x) = c \quad (1)$$

Ακόμη

$$f^2(x) + g^2(x) = c \xRightarrow{x=0} f^2(0) + g^2(0) = c \xRightarrow{\substack{f(0)=0 \\ g(0)=1}} c = 1 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \boxed{(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1}$$

β) Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων, με

$$h'(x) = 2[f(x) - \eta\mu x][f'(x) - \sigma\upsilon\nu x] + 2[g(x) - \sigma\upsilon\nu x][g'(x) + \eta\mu x] \xRightarrow{\substack{f'(x)=g(x) \\ g'(x)=-f(x)}}$$

$$\Rightarrow h'(x) = 2[f(x) - \eta\mu x][g(x) - \sigma\upsilon\nu x] + 2[g(x) - \sigma\upsilon\nu x][-f(x) + \eta\mu x] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(x) = 2[f(x) - \eta\mu x][g(x) - \sigma\upsilon\nu x] - 2[g(x) - \sigma\upsilon\nu x][f(x) - \eta\mu x] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(x) = 0$$

οπότε σύμφωνα με γνωστή πρόταση η συνάρτηση h είναι σταθερή

γ) Έχουμε άρα $\boxed{h(x) = c} \quad (1)$, για κάθε $x \in \Delta$ και ακόμη

$$h(x) = c \Rightarrow [f(x) - \eta\mu x]^2 + [g(x) - \sigma\nu x]^2 = c \stackrel{x=0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow [f(0) - \eta\mu 0]^2 + [g(0) - \sigma\nu 0]^2 = c \stackrel{\substack{f(0)=0 \\ g(0)=1}}{\Rightarrow} \boxed{c=0} \quad (2)$$

Οπότε

$$(1), (2) \Rightarrow h(x) = 0 \Rightarrow [f(x) - \eta\mu x]^2 + [g(x) - \sigma\nu x]^2 = 0 \stackrel{\substack{[f(x) - \eta\mu x]^2 \geq 0 \\ [g(x) - \sigma\nu x]^2 \geq 0}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) - \eta\mu x = 0 \\ \text{και} \\ g(x) - \sigma\nu x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{f(x) = \eta\mu x} \\ \text{και} \\ \boxed{g(x) = \sigma\nu x} \end{cases}$$