22.29

$$f''(x)f(x)=f'(x)\left(f'(x)+f(x)\right)\Rightarrow f''(x)f(x)=f'(x)f'(x)+f'(x)f(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)f(x)=f'(x)f'(x)+f'(x)f(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)f(x)=f'(x)f'(x)+f'(x)f(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)f(x)-f'(x)f'(x)=f'(x)f(x)\overset{\text{διαιρούμε με } f^2(x)\neq 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{f''(x)f(x)-f'(x)f'(x)}{f^2(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}\Rightarrow\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=\frac{f'(x)}{f(x)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=ce^x\overset{f(x)>0}{\Rightarrow}\left[\ln f(x)\right]'=\left(ce^x\right)'\Rightarrow \ln f(x)=ce^x+c_1 \quad (1)$$

Ακόμη

$$(1)\overset{x=0}{\Rightarrow}\ln f(0)=ce^0+c_1\overset{f(0)=e}{\Rightarrow}1=c+c_1 \quad (2)$$

$$(1)\overset{x=1}{\Rightarrow}\ln f(1)=ce^1+c_1\overset{f(1)=e^e}{\Rightarrow}e=ce+c_1 \quad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα των (2) και (3) βρίσκουμε $c=1$ και $c_1=0$

Επομένως

$$(1)\overset{\substack{c=1\\c_1=0}}{\Rightarrow}\ln f(x)=e^x\Rightarrow \boxed{f(x)=e^{e^x}}$$