Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

22.27 1)

$$f'(x)=-4f(x)\Rightarrow f'(x)+4f(x)=0\overset{\text{πολλαπλασιάζουμε με } e^{4x}}{\Rightarrow} f'(x)e^{4x}+4f(x)e^{4x}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[f(x)e^{4x}\right]'=0\Rightarrow f(x)e^{4x}=c\overset{e^{4x}\neq 0}{=}f(x)=\frac{c}{e^{4x}}\quad (1)$$

Ακόμη

$$f(1)=e^2\overset{(1)}{\Rightarrow}\frac{c}{e^{4\cdot 1}}=e^2\Rightarrow c=e^6\quad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow f(x)=\frac{e^6}{e^{4x}}\Rightarrow \boxed{f(x)=e^{-4x+6}}$$

22.27 2)

$$f'(x)+f(x)=1\Rightarrow\overset{\text{πολλαπλασιάζουμε με } e^{x}}{\Rightarrow} f'(x)e^{x}+f(x)e^{x}=e^{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[f(x)e^{x}\right]'=\left(e^x\right)'\Rightarrow f(x)e^x=e^x+c\Rightarrow f(x)=\frac{e^x+c}{e^x}\quad (1)$$

Ακόμη

$$f(0)=2\overset{(1)}{\Rightarrow}\frac{e^0+c}{e^0}=2\Rightarrow c+1=2\Rightarrow c=1\quad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow \boxed{f(x)=\frac{e^x+1}{e^x}}$$

22.27 3)

$$xf'(x)+2f(x)=3x\Rightarrow\overset{\text{πολλαπλασιάζουμε με } x}{\Rightarrow} x^2f'(x)+2xf(x)=3x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[x^2f(x)\right]'=\left(x^3\right)'\Rightarrow x^2f(x)=x^3+c\overset{x^2\neq 0}{\Rightarrow} f(x)=\frac{x^3+c}{x^2}\quad (1)$$

Ακόμη

$$f(1)=1\overset{(1)}{\Rightarrow}\frac{1^3+c}{1^2}=1\Rightarrow c+1=1\Rightarrow c=0\quad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{x^2}\Rightarrow \boxed{f(x)=x}$$

22.27 4)

$$xf'(x)=5f(x)\Rightarrow xf'(x)-5f(x)=0\overset{\text{πολλαπλασιάζουμε με } x^4}{\Rightarrow} x^5f'(x)-5x^4f(x)=0\Rightarrow$$

$$\overset{\text{διαιρούμε με } x^{10}\neq 0}{\Rightarrow}\frac{x^5f'(x)-5x^4f(x)}{x^{10}}=0\Rightarrow\left[\frac{f(x)}{x^5}\right]'=0\Rightarrow\frac{f(x)}{x^5}=c\Rightarrow f(x)=cx^5\quad (1)$$

Ακόμη

$$f(1)=1\overset{(1)}{\Rightarrow}c\cdot 1^5=1\Rightarrow c=1\quad (2)$$

$(1),(2) \Rightarrow \boxed{f(x)=x^5}$

22.27 5)

$$f(x)f'(x)=2x^3 \Rightarrow 2f(x)f'(x)=4x^3 \Rightarrow \left[f^2(x)\right]'=\left(x^4\right)' \Rightarrow f^2(x)=x^4+c \quad (1)$$

Ακόμη

$$(1) \overset{x=0}{\Rightarrow} f^2(0)=0^4+c \overset{f(0)=1}{\Rightarrow} c=1 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow f^2(x)=x^4+1 \quad (3)$$

Επιπλέον η συνάρτηση f <u>δεν μηδενίζεται</u> διότι

αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_o \in R$ με $f(x_o)=0$ τότε

$$f(x)f'(x)=2x^3 \overset{x=x_o}{\Rightarrow} f(x_o)f'(x_o)=2x_o^3 \overset{f(x_o)=0}{\Rightarrow} 2x_o^3=0 \Rightarrow x_o=0 \text{ άρα } f(0)=0 \text{ άτοπο}$$
διότι $f(0)=1$

Άρα η f είναι συνεχής και μη μηδενιζόμενη οπότε διατηρεί πρόσημο και αφού $f(0)=1>0$ θα είναι $\boxed{f(x)>0}$ για κάθε $x \in R$

Έτσι

$$(3) \overset{f(x)>0}{\Rightarrow} \boxed{f(x)=\sqrt{x^4+1}}$$

22.27 6)

$$xf'(x)-f(x)=x^2 \overset{\text{διαιρούμε με } x^2\neq 0}{\Rightarrow} \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=1 \Rightarrow \left[\frac{f(x)}{x}\right]'=(x)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x}=x+c \Rightarrow f(x)=x^2+cx \quad (1)$$

Ακόμη

$$f(1)=3 \overset{(1)}{\Rightarrow} 1^2+c\cdot 1=3 \Rightarrow c=2 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \boxed{f(x)=x^2+2x}$$

22.27 7)

$$f(x)=xf'(x) \Rightarrow xf'(x)-f(x)=0 \overset{\text{διαιρούμε με } x^2\neq 0}{\Rightarrow} \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{f(x)}{x}\right]'=0 \Rightarrow \frac{f(x)}{x}=c \Rightarrow f(x)=cx \quad (1)$$

Ακόμη

$$f(1)=2 \overset{(1)}{\Rightarrow} c\cdot 1=2 \Rightarrow c=2 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \boxed{f(x)=2x}$$

22.27 8)

$$\left[f(x)\right]^2 f'(x)=x^2 \Rightarrow 3\left[f(x)\right]^2 f'(x)=3x^2 \Rightarrow \left[f^3(x)\right]'=\left(x^3\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^3(x)=x^3+c \quad (1)$$

Ακόμη

$$f(0)=0\overset{(1)}{\Rightarrow}0^3+c=0\Rightarrow c=0 \quad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow f^3(x)=x^3\Rightarrow \boxed{f(x)=x}$$

22.27 9)

$$g'(x)\sigma\upsilon\nu x+g(x)\eta\mu x=g(x)\sigma\upsilon\nu x \underset{\substack{\sigma\upsilon\nu x\neq 0\\ \delta\iota\acute{o}\tau\iota\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}}{\overset{\substack{\delta\iota\alpha\iota\rho o\acute{\upsilon}\mu\varepsilon\\ \mu\varepsilon\,\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\Rightarrow}} \frac{g'(x)\sigma\upsilon\nu x+g(x)\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\Rightarrow\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=ce^x\Rightarrow g(x)=ce^x\sigma\upsilon\nu x \quad (1)$$

Ακόμη

$$g(0)=1992\overset{(1)}{\Rightarrow}ce^0\sigma\upsilon\nu 0=1992\Rightarrow c=1992 \quad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow\boxed{g(x)=1992e^x\sigma\upsilon\nu x}$$

22.27 10)

$$f'(x)=-2xe^{f(x)}\overset{\delta\iota\alpha\iota\rho o\acute{\upsilon}\mu\varepsilon\ \mu\varepsilon\ e^{f(x)}\neq 0}{\Rightarrow}\frac{f'(x)}{e^{f(x)}}=-2x\Rightarrow f'(x)e^{f(x)}=-2x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -f'(x)e^{f(x)}=2x\Rightarrow\left[e^{-f(x)}\right]=\left(x^2\right)+c\Rightarrow e^{-f(x)}=x^2+c\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -f(x)=\ln\left(x^2+c\right)\Rightarrow f(x)=-\ln\left(x^2+c\right)\Rightarrow \quad (1)$$

Ακόμη , επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων , θα είναι

$$f(0)=0\overset{(1)}{\Rightarrow}-\ln\left(0^2+c\right)=0\Rightarrow\ln c=\ln 1\Rightarrow c=1 \quad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow\boxed{f(x)=-\ln\left(x^2+1\right)}$$

22.27 11)

$$f'(x)-f(x)=\frac{e^{2x}}{e^x+1}\overset{\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\alpha\sigma\iota\acute{\alpha}\zeta o\upsilon\mu\varepsilon\ \mu\varepsilon\ e^{-x}}{\Rightarrow}e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[e^{-x}f(x)\right]'=\left[\ln\left(e^x+1\right)\right]'\Rightarrow e^{-x}f(x)=\ln\left(e^x+1\right)+c\overset{\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\alpha\sigma\iota\acute{\alpha}\zeta o\upsilon\mu\varepsilon\ \mu\varepsilon\ e^{x}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(x)=e^x\ln\left(e^x+1\right)+ce^x \quad (1)$$

$$f(0)=\ln 2\overset{(1)}{\Rightarrow}e^0\ln\left(e^0+1\right)+ce^0=\ln 2\Rightarrow\cancel{\ln 2}+c=\cancel{\ln 2}\Rightarrow c=0 \quad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow\boxed{f(x)=e^x\ln\left(e^x+1\right)}$$