22.25

α) $h(x)=f(x)\etaμx \overset{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} \boxed{h'(x)}=f'(x)\etaμx+f(x)συνx$ (1)

$Φ(x)=g(x)συνx \overset{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} \boxed{Φ'(x)}=g'(x)συνx-g(x)\etaμx$ (2)

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{h'(x)=Φ'(x)} \overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow} f'(x)\etaμx+f(x)συνx=g'(x)συνx-g(x)\etaμx \Leftrightarrow$$

$$\overset{\substack{\text{διαιρούμε}\\ \text{με } συνx\neq 0\\ \text{διότι } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x)\etaμx}{συνx}+\frac{f(x)\cancel{συνx}}{\cancel{συνx}}=\frac{g'(x)\cancel{συνx}}{\cancel{συνx}}-\frac{g(x)\etaμx}{συνx}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)εφx+f(x)=g'(x)-g(x)εφx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[f'(x)+g(x)\right]εφx=g'(x)-f(x) \overset{f'(x)\neq -g(x)}{\Leftrightarrow} \boxed{\frac{g'(x)-f(x)}{f'(x)+g(x)}=εφx}$$

που ισχύει

β) Έχουμε

$h'(x)=Φ'(x)\Rightarrow h(x)=Φ(x)+c\Rightarrow f(x)\etaμx=g(x)συνx+c$ (3)

Ακόμη

$$(3)\overset{x=\frac{\pi}{4}}{\Rightarrow} f\left(\frac{\pi}{4}\right)\etaμ\frac{\pi}{4}=g\left(\frac{\pi}{4}\right)συν\frac{\pi}{4}+c \overset{f\left(\frac{\pi}{4}\right)=g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\Rightarrow} \cancel{f\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}}=\cancel{f\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}}+c\Rightarrow c=0 \quad (4)$$

$$(3),(4)\Rightarrow f(x)\etaμx=g(x)συνx \overset{\substack{f(x)\neq 0\\ συνx\neq 0}}{\Rightarrow} \frac{\etaμx}{συνx}=\frac{g(x)}{f(x)}\Rightarrow \boxed{\frac{g(x)}{f(x)}=εφx}$$