

α) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων, με

$$g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2f'(x)f''(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2f'(x)f(x) \Rightarrow \boxed{g'(x) = 0}$$

οπότε σύμφωνα με γνωστή πρόταση η συνάρτηση g είναι σταθερή άρα $g(x) = c$, για κάθε $x \in \Delta$

β) Είναι

$$g(x) = c \Rightarrow g(0) = c \Rightarrow [f(0)]^2 - [f'(0)]^2 = c \stackrel{f(0)=f'(0)=2}{\Rightarrow} \boxed{c=0}$$

$$\text{Οπότε για κάθε } x \in \Delta \text{ είναι } g(x) = 0 \Rightarrow [f(x)]^2 - [f'(x)]^2 = 0 \quad (1)$$

Όμως

$$\left. \begin{array}{l} f: \text{συνεχής} \\ f: \text{μη μηδενιζόμενη} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } f \text{ διατηρεί πρόσημο} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \Delta \\ f(0) = 2 > 0 \end{array} \right.$$

Ακόμη και η f' είναι μη μηδενιζόμενη διότι

αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_0) = 0$ τότε

$$(1) \stackrel{x=x_0}{\Rightarrow} [f(x_0)]^2 - [f'(x_0)]^2 = 0 \stackrel{f'(x_0)=0}{\Rightarrow} f(x_0) = 0 \text{ άτοπο διότι η } f \text{ είναι μη μηδενιζόμενη}$$

Έτσι

$$\left. \begin{array}{l} f': \text{συνεχής} \\ f': \text{μη μηδενιζόμενη} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } f' \text{ διατηρεί πρόσημο} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \Delta \\ f'(0) = 2 > 0 \end{array} \right.$$

Οπότε

$$(1) \stackrel{x=x_0}{\Rightarrow} [f(x)]^2 - [f'(x)]^2 = 0 \Rightarrow [f(x)]^2 = [f'(x)]^2 \stackrel{\substack{f(x)>0 \\ f'(x)>0}}{\Rightarrow} \boxed{f'(x) = f(x)}$$

γ) Σύμφωνα με γνωστή πρόταση έχουμε $f'(x) = f(x) \Rightarrow \boxed{f(x) = ce^x}$

Ακόμη

$$f(x) = ce^x \stackrel{x=0}{\Rightarrow} f(0) = ce^0 \stackrel{f(0)=2}{\Rightarrow} c = 2$$

$$\text{Οπότε τελικά } \boxed{f(x) = 2e^x}$$