

21.9 1)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 5]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, 5)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (1, 5)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} \stackrel{f(1)=2}{\Rightarrow} f'(\xi) = \frac{f(5) - 2}{4} \quad (1)$$

Οπότε

$$3 \leq f'(x) \leq 5 \stackrel{\text{θέτουμε } x=\xi}{\Rightarrow} 3 \leq f'(\xi) \leq 5 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 3 \leq \frac{f(5) - 2}{4} \leq 5 \stackrel{\text{πολλαπλασιάζουμε με 4}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 12 \leq f(5) - 2 \leq 20 \Rightarrow 14 \leq f(5) \leq 22$$

21.9 2)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[2, 5]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(2, 5)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (2, 5)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} \stackrel{f(2)=2}{\Rightarrow} f'(\xi) = \frac{f(5) - 2}{3} \quad (1)$$

Οπότε

$$1 \leq f'(x) \leq 5 \stackrel{\text{θέτουμε } x=\xi}{\Rightarrow} 1 \leq f'(\xi) \leq 5 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 1 \leq \frac{f(5) - 2}{3} \leq 5 \stackrel{\text{πολλαπλασιάζουμε με 3}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 3 \leq f(5) - 2 \leq 15 \Rightarrow \boxed{5 \leq f(5) \leq 17}$$

21.9 3)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-3, 2]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-3, 2)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (-3, 2)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(-3)}{2 - (-3)} \stackrel{f(-3)=5}{\Rightarrow} f'(\xi) = \frac{f(2) - 5}{5} \quad (1)$$

Οπότε

$$-1 \leq f'(x) \leq 5 \stackrel{\text{θέτουμε } x=\xi}{\Rightarrow} -1 \leq f'(\xi) \leq 5 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} -1 \leq \frac{f(2) - 5}{5} \leq 5 \stackrel{\text{πολλαπλασιάζουμε με 5}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow -5 \leq f(2) - 5 \leq 25 \Rightarrow \boxed{0 \leq f(2) \leq 30}$$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[2, x]$ αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(2, x)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (2, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \stackrel{f(2)=0}{\Rightarrow} f'(\xi) = \frac{f(x)}{x - 2} \quad (1)$$

Οπότε

$$0 < f'(x) < 1 \stackrel{\text{θέτουμε } x=\xi}{\Rightarrow} 0 < f'(\xi) < 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 0 < \frac{f(x)}{x - 2} < 1 \stackrel{\text{πολλαπλασιάζουμε με } x-2>0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \boxed{0 < f(x) < x - 2}$$

21.9 5)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , αφού $f'(x) \geq M$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Οπότε

$$f'(x) \geq M \stackrel{\text{θέτουμε } x=\xi}{\Rightarrow} f'(\xi) \geq M \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \geq M \stackrel{\text{πολλαπλασιάζουμε με } \beta-\alpha>0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(\beta) - f(\alpha) \geq M(\beta - \alpha) \Rightarrow \boxed{f(\beta) \geq f(\alpha) + M(\beta - \alpha)}$$

21.9 6)

Έστω $\xi_1 < \xi_2$. Τότε

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (ξ_1, ξ_2) , αφού $|f'(x)| < \kappa$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \quad (1)$$

Οπότε

$$|f'(x)| < \kappa \stackrel{\text{θέτουμε } x=\xi}{\Rightarrow} |f'(\xi)| < \kappa \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \left| \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \right| < \kappa \Rightarrow \frac{|f(\xi_2) - f(\xi_1)|}{|\xi_2 - \xi_1|} < \kappa \Rightarrow$$

$$\stackrel{\text{πολλαπλασιάζουμε με } |\xi_2 - \xi_1|>0}{\Rightarrow} \boxed{|f(\xi_2) - f(\xi_1)| < \kappa |\xi_2 - \xi_1|}$$