

21.7 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[x, x+5]$, ως εκθετική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(x, x+5)$, ως πολυωνυμική με $f'(x) = e^x$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (x, x+5)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+5) - f(x)}{x+5 - x} \Rightarrow e^\xi = \frac{e^{x+5} - e^x}{5} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{e^x < \frac{e^{x+5} - e^x}{5} < e^{x+5}} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} e^x < e^\xi < e^{x+5} \Leftrightarrow x < \xi < x+5 \text{ που ισχύει διότι } \xi \in (x, x+5)$$

21.7 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, x]$, ως εκθετική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, x)$, ως εκθετική με $f'(x) = e^x$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (1, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Rightarrow e^\xi = \frac{e^x - e}{x - 1} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{e < \frac{e^x - e}{x - 1} < e^x} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} e < e^\xi < e^x \Leftrightarrow 1 < \xi < x \text{ που ισχύει διότι } \xi \in (1, x)$$

21.7 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, x]$, ως εκθετική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, x)$, ως εκθετική με $f'(x) = e^x$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (0, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow e^\xi = \frac{e^x - e^0}{x} \Rightarrow e^\xi = \frac{e^x - 1}{x} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 1 < e^\xi < e^x \Leftrightarrow e^0 < e^\xi < e^x \Leftrightarrow 0 < \xi < x$$

που ισχύει διότι $\xi \in (0, x)$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[x, x+2]$, ως λογαριθμική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(x, x+2)$, ως λογαριθμική με $f'(x) = \frac{1}{x}$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (x, x+2)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+2) - f(x)}{x+2 - x} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln(x+2) - \ln x}{2} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{\frac{1}{x+2} < \frac{\ln(x+2) - \ln x}{2} < \frac{1}{x}} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x+2} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x} \Leftrightarrow x+2 > \xi > x$$

που ισχύει διότι $\xi \in (x, x+2)$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[e, x]$, ως λογαριθμική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (e, x) , ως λογαριθμική με $f'(x) = \frac{1}{x}$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (e, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(e)}{x - e} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln x - \ln e}{x - e} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln x - 1}{x - e} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{\frac{1}{x} < \frac{\ln x - 1}{x - e} < \frac{1}{e}} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{e} \Leftrightarrow x > \xi > e$$

που ισχύει διότι $\xi \in (e, x)$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2^x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, x]$, ως εκθετική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, x)$, ως εκθετική με $f'(x) = 2^x \ln 2$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (0, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow 2^\xi \ln 2 = \frac{2^x - 2^0}{x} \Rightarrow 2^\xi \ln 2 = \frac{2^x - 1}{x} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{\ln 2 < \frac{2^x - 1}{x} < 2^x \ln 2} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \ln 2 < 2^\xi \ln 2 < 2^x \ln 2 \stackrel{\ln 2 > 0}{\Leftrightarrow} 1 < 2^\xi < 2^x \Leftrightarrow 2^0 < 2^\xi < 2^x \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 0 < \xi < x$ που ισχύει διότι $\xi \in (0, x)$

21.7 7)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 7^x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, x]$, ως εκθετική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, x)$, ως εκθετική με $f'(x) = 7^x \ln 2$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (0, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow 7^\xi \ln 7 = \frac{7^x - 7^0}{x} \Rightarrow 7^\xi \ln 7 = \frac{7^x - 1}{x} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{\ln 7 < \frac{7^x - 1}{x} < 7^x \ln 7} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \ln 7 < 7^\xi \ln 7 < 7^x \ln 7 \stackrel{\ln 7 > 0}{\Leftrightarrow} 1 < 7^\xi < 7^x \Leftrightarrow 7^0 < 7^\xi < 7^x \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 0 < \xi < x$ που ισχύει διότι $\xi \in (0, x)$

21.7 8)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta \mu x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, x]$, ως τριγωνομετρική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, x)$, ως τριγωνομετρική με $f'(x) = \sigma \nu x$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (0, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow \sigma \nu \xi = \frac{\eta \mu x - \eta \mu 0}{x - 0} \Rightarrow \sigma \nu \xi = \frac{\eta \mu x}{x} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{\sigma \nu x < \frac{\eta \mu x}{x} < 1} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \sigma \nu x < \sigma \nu \xi < 1 \Leftrightarrow \sigma \nu x < \sigma \nu \xi < \sigma \nu 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \xi > 0$$

η $\sigma \nu x$ είναι
γνησίως φθίνουσα
στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

που ισχύει διότι $\xi \in (0, x)$

21.7 9)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sigma \nu x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, x]$, ως τριγωνομετρική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, x)$, ως τριγωνομετρική με $f'(x) = -\eta \mu x$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (0, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow -\eta \mu \xi = \frac{\sigma \nu x - \sigma \nu 0}{x - 0} \Rightarrow -\eta \mu \xi = \frac{\sigma \nu x - 1}{x} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

η ημχ είναι
γνησίως αύξουσα
στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

που ισχύει διότι $\xi \in (0, x)$