

21.6 1)

Αν $\alpha = \beta$ τότε η σχέση προφανώς ισχύει ως ισότητα

Αν $\beta < \alpha$ τότε

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \varepsilon\phi x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\beta, \alpha]$, ως τριγωνομετρική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (β, α) , ως τριγωνομετρική συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\beta, \alpha)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \xi} = \frac{\varepsilon\phi\alpha - \varepsilon\phi\beta}{\alpha - \beta} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{\frac{\alpha - \beta}{\sin^2 \beta} < \varepsilon\phi\alpha - \varepsilon\phi\beta < \frac{\alpha - \beta}{\sin^2 \alpha}} \stackrel{\alpha - \beta > 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\sin^2 \beta} < \frac{\varepsilon\phi\alpha - \varepsilon\phi\beta}{\alpha - \beta} < \frac{1}{\sin^2 \alpha} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \beta} < \frac{1}{\sin^2 \xi} < \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Leftrightarrow \sin^2 \beta > \sin^2 \xi > \sin^2 \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \beta > \sin \xi > \sin \alpha \stackrel{\substack{\text{η } \sin x \text{ είναι} \\ \text{γνησίως φθίνουσα}}}{\Leftrightarrow} \beta < \xi < \alpha$$

που ισχύει διότι $\xi \in (\beta, \alpha)$

21.6 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^v$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\beta, \alpha]$, ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (β, α) , ως πηλίκo παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\text{με } f'(x) = vx^{v-1}$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\beta, \alpha)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow v\xi^{v-1} = \frac{\alpha^v - \beta^v}{\alpha - \beta} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{v\beta^{v-1}(\alpha - \beta) < \alpha^v - \beta^v < v\alpha^{v-1}(\alpha - \beta)} \stackrel{\alpha - \beta > 0}{\Leftrightarrow} v\beta^{v-1} < \frac{\alpha^v - \beta^v}{\alpha - \beta} < v\alpha^{v-1} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\beta}^{v-1} < \cancel{\xi}^{v-1} < \cancel{\alpha}^{v-1} \Leftrightarrow \beta^{v-1} < \xi^{v-1} < \alpha^{v-1} \Leftrightarrow \beta < \xi < \alpha$$

που ισχύει διότι $\xi \in (\beta, \alpha)$

21.6 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{-x}$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων

με $f'(x) = -e^{-x}$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow -e^{-\xi} = \frac{e^{-\beta} - e^{-\alpha}}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{(\beta - \alpha)e^{-\beta} < e^{-\alpha} - e^{-\beta} < (\beta - \alpha)e^{-\alpha}}^{\beta - \alpha > 0} \Leftrightarrow e^{-\beta} < \frac{e^{-\alpha} - e^{-\beta}}{\beta - \alpha} < e^{-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -e^{-\beta} > \frac{e^{-\beta} - e^{-\alpha}}{\alpha - \beta} > -e^{-\alpha} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -e^{-\beta} > -e^{-\xi} > -e^{-\alpha} \Leftrightarrow e^{-\beta} < e^{-\xi} < e^{-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\beta < -\xi < -\alpha \Leftrightarrow \beta > \xi > \alpha \quad \text{που ισχύει διότι } \xi \in (\alpha, \beta)$$

21.6 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^4}$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , ως πηλίκo παραγωγίσιμων συναρτήσεων

με $f'(x) = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow -\frac{4}{\xi^5} = \frac{\frac{1}{\beta^4} - \frac{1}{\alpha^4}}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{-\frac{4(\beta - \alpha)}{\alpha^5} < \frac{1}{\beta^4} - \frac{1}{\alpha^4} < -\frac{4(\beta - \alpha)}{\beta^5}}^{\beta - \alpha > 0} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -\frac{4}{\alpha^5} < \frac{\frac{1}{\beta^4} - \frac{1}{\alpha^4}}{\beta - \alpha} < -\frac{4}{\beta^5} \Leftrightarrow -\frac{4}{\alpha^5} < -\frac{4}{\xi^5} < -\frac{4}{\beta^5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\alpha^5} > \frac{4}{\xi^5} > \frac{4}{\beta^5} \Leftrightarrow \alpha^5 < \xi^5 < \beta^5 \Leftrightarrow \alpha < \xi < \beta \quad \text{που ισχύει διότι } \xi \in (\alpha, \beta)$$

21.6 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt[v]{x}$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$,

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , με

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{v}} \right)' = \frac{1}{v} x^{\frac{1-v}{v}} = \frac{1}{v} x^{-\frac{v-1}{v}} = \frac{1}{v \sqrt[v]{x^{v-1}}}$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow \frac{1}{v\sqrt[v]{\xi^{v-1}}} = \frac{\sqrt[v]{\beta} - \sqrt[v]{\alpha}}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{\frac{\beta - \alpha}{v\sqrt[v]{\beta^{v-1}}} < \sqrt[v]{\beta} - \sqrt[v]{\alpha} < \frac{\beta - \alpha}{v\sqrt[v]{\alpha^{v-1}}}}^{\beta - \alpha > 0} \Leftrightarrow \frac{1}{v\sqrt[v]{\beta^{v-1}}} < \frac{\sqrt[v]{\beta} - \sqrt[v]{\alpha}}{\beta - \alpha} < \frac{1}{v\sqrt[v]{\alpha^{v-1}}} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{v\sqrt[v]{\beta^{v-1}}} < \frac{1}{v\sqrt[v]{\xi^{v-1}}} < \frac{1}{v\sqrt[v]{\alpha^{v-1}}} \Leftrightarrow \cancel{v}\sqrt[v]{\beta^{v-1}} > \cancel{v}\sqrt[v]{\xi^{v-1}} > \cancel{v}\sqrt[v]{\alpha^{v-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[v]{\beta^{v-1}} > \sqrt[v]{\xi^{v-1}} > \sqrt[v]{\alpha^{v-1}} \Leftrightarrow \beta^{v-1} > \xi^{v-1} > \alpha^{v-1} \Leftrightarrow \beta > \xi > \alpha$$

που ισχύει διότι $\xi \in (\alpha, \beta)$

21.6 6)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως λογαριθμική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , ως λογαριθμική με $f'(x) = \frac{1}{x}$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{\frac{\beta - \alpha}{\beta} < \ln \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta - \alpha}{\alpha}}^{\beta - \alpha > 0} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\alpha} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \beta > \xi > \alpha$$

που ισχύει διότι $\xi \in (\alpha, \beta)$

21.6 7)

Αν $x = y$ τότε η σχέση προφανώς ισχύει ως ισότητα

Έστω τώρα ότι $x < y$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[x, y]$, ως τριγωνομετρική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x, y) , ως τριγωνομετρική με $f'(x) = \cos x$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (x, y)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \Rightarrow \cos \xi = \frac{\sin y - \sin x}{y - x} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{|\sin x - \sin y| \leq |x - y|}^{|x - y| > 0} \Leftrightarrow \left| \frac{\sin x - \sin y}{x - y} \right| \leq 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} |\cos \xi| \leq 1 \Leftrightarrow |\eta \mu \xi| \leq 1$$

που προφανώς ισχύει

21.6 8)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[α, β]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(α, β)$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

με $f'(x) = \sin x - x \cos x$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (α, β)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow \sin \xi - \xi \cos \xi = \frac{\beta \sin \beta - \alpha \sin \alpha}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{|\alpha \sin \alpha - \beta \sin \beta| < 2|\alpha - \beta|} \stackrel{|\alpha - \beta| > 0}{\Leftrightarrow} \left| \frac{\alpha \sin \alpha - \beta \sin \beta}{\alpha - \beta} \right| < 2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} |\sin \xi - \xi \cos \xi| < 2 \Leftrightarrow$$

που ισχύει διότι

$$|\sin \xi - \xi \cos \xi| \leq |\sin \xi| + |\xi \cos \xi| \leq 1 + |\xi| \cdot 1 \stackrel{\xi \in (\alpha, \beta) \Rightarrow 0 < \xi < 1}{<} 1 + 1 = 2$$