

21.5 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^7$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, ως πολυωνυμική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 7x^6$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow 7\xi^6 = \frac{b^7 - a^7}{b - a} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{7a^6 < \frac{b^7 - a^7}{b - a} < 7b^6} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 7a^6 < 7\xi^6 < 7b^6 \Leftrightarrow a^6 < \xi^6 < b^6 \stackrel{0 < a < \xi < b}{\Leftrightarrow} a < \xi < b \text{ που ισχύει}$$

διότι $\xi \in (a, b)$

21.5 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^{11}$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, ως πολυωνυμική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 11x^{10}$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow 11\xi^{10} = \frac{b^{11} - a^{11}}{b - a} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{11a^{10} < \frac{b^{11} - a^{11}}{b - a} < 11b^{10}} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 11a^{10} < 11\xi^{10} < 11b^{10} \Leftrightarrow a^{10} < \xi^{10} < b^{10} \stackrel{0 < a < \xi < b}{\Leftrightarrow} a < \xi < b \text{ που}$$

ισχύει διότι $\xi \in (a, b)$

21.5 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, ως εκθετική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b) , ως εκθετική με $f'(x) = e^x$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow e^\xi = \frac{e^b - e^a}{b - a} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{e^a < \frac{e^b - e^a}{b - a} < e^b} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} e^a < e^\xi < e^b \Leftrightarrow a < \xi < b \text{ που ισχύει διότι } \xi \in (a, b)$$

21.5 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta\mu x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως τριγωνομετρική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , ως τριγωνομετρική με $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu \xi = \frac{\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu\beta < \frac{\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha}{\beta - \alpha} < \sigma\upsilon\nu\alpha} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \sigma\upsilon\nu\beta < \sigma\upsilon\nu\xi < \sigma\upsilon\nu\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{η } \sigma\upsilon\nu x \text{ είναι} \\ \text{γνησίως φθίνουσα} \end{array} \quad \beta > \xi > \alpha \quad \underline{\text{που ισχύει}}$$

διότι $\xi \in (\alpha, \beta)$

21.5 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως τριγωνομετρική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , ως τριγωνομετρική με $f'(x) = -\eta\mu x$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow -\eta\mu\xi = \frac{\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{-\eta\mu\beta < \frac{\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\beta - \alpha} < -\eta\mu\alpha} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -\eta\mu\beta < -\eta\mu\xi < -\eta\mu\alpha \Leftrightarrow \eta\mu\beta > \eta\mu\xi > \eta\mu\alpha \Leftrightarrow$$

η $\eta\mu x$ είναι
γνησίως αύξουσα

$$\Leftrightarrow \beta > \xi > \alpha \quad \underline{\text{που ισχύει}} \quad \text{διότι } \xi \in (\alpha, \beta)$$

21.5 6)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sigma\phi x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως τριγωνομετρική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , ως τριγωνομετρική με $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu x}$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow -\frac{1}{\eta\mu^2\xi} = \frac{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{-\frac{1}{\eta\mu^2\alpha} < \frac{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha}{\beta - \alpha} < -\frac{1}{\eta\mu^2\beta}} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{\eta\mu^2\alpha} < -\frac{1}{\eta\mu^2\xi} < -\frac{1}{\eta\mu^2\beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu^2\alpha} > \frac{1}{\eta\mu^2\xi} > \frac{1}{\eta\mu^2\beta} \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha < \eta\mu^2\xi < \eta\mu^2\beta \Leftrightarrow \begin{array}{l} \eta\mu\alpha > 0 \\ \eta\mu\beta > 0 \\ \eta\mu\xi > 0 \end{array} \quad \eta\mu\alpha < \eta\mu\xi < \eta\mu\beta \quad \begin{array}{l} \text{η } \eta\mu x \text{ είναι} \\ \text{γνησίως αύξουσα} \end{array} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \alpha < \xi < \beta$ που ισχύει διότι $\xi \in (\alpha, \beta)$

21.5 7)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2^x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως εκθετική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , ως εκθετική με $f'(x) = 2^x \ln 2$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow 2^\xi \ln 2 = \frac{2^\beta - 2^\alpha}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{2^\alpha \ln 2 < \frac{2^\beta - 2^\alpha}{\beta - \alpha} < 2^\beta \ln 2} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2^\alpha \ln 2 < 2^\xi \ln 2 < 2^\beta \ln 2 \stackrel{\ln 2 > 0}{\Leftrightarrow} 2^\alpha < 2^\xi < 2^\beta \Leftrightarrow \alpha < \xi < \beta$$

που ισχύει διότι $\xi \in (\alpha, \beta)$

21.5 8)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 5^x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως εκθετική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , ως εκθετική με $f'(x) = 5^x \ln 5$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow 5^\xi \ln 5 = \frac{5^\beta - 5^\alpha}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{5^\alpha \ln 5 < \frac{5^\beta - 5^\alpha}{\beta - \alpha} < 5^\beta \ln 5} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 5^\alpha \ln 5 < 5^\xi \ln 5 < 5^\beta \ln 5 \stackrel{\ln 5 > 0}{\Leftrightarrow} 5^\alpha < 5^\xi < 5^\beta \Leftrightarrow \alpha < \xi < \beta$$

που ισχύει διότι $\xi \in (\alpha, \beta)$

21.5 9)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x \ln x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

με $f'(x) = \ln x + 1$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow \ln \xi + 1 = \frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{\ln \alpha + 1 < \frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha}{\beta - \alpha} < \ln \beta + 1} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \ln \alpha + \cancel{1} < \ln \xi + \cancel{1} < \ln \beta + \cancel{1} \Leftrightarrow$$

$\ln \alpha < \ln \xi < \ln \beta \Leftrightarrow \alpha < \xi < \beta$ που ισχύει διότι $\xi \in (\alpha, \beta)$

