

21.4 1)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 3]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, 3)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (1, 3)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{f(3) - f(1)}{2} \quad (1)$$

Ομοίως

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[3, 5]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(3, 5)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in (3, 5)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} \Rightarrow f'(\xi_2) = \frac{f(5) - f(3)}{2} \quad (2)$$

Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (1, 3)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (3, 5)$ τέτοια

$$\text{ώστε } \boxed{f'(\xi_1) + f'(\xi_2)} \stackrel{(1),(2)}{=} \frac{\cancel{f(3)} - f(1)}{2} + \frac{f(5) - \cancel{f(3)}}{2} = \frac{f(5) - f(1)}{2} \stackrel{f(5)=f(1)}{=} \boxed{0}$$

21.4 2)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-3, 1]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-3, 1)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (-3, 1)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)} \Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(-3)}{4} \quad (1)$$

Ομοίως

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 5]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, 5)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in (1, 5)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} \Rightarrow f'(\xi_2) = \frac{f(5) - f(1)}{4} \quad (2)$$

Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (-3, 1)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (1, 5)$ τέτοια

$$\text{ώστε } \boxed{f'(\xi_1) + f'(\xi_2)} \stackrel{(1),(2)}{=} \frac{\cancel{f(1)} - f(-3)}{2} + \frac{f(5) - \cancel{f(1)}}{2} = \frac{f(5) - f(-3)}{2} \stackrel{f(-3)=f(5)}{=} \boxed{0}$$

21.4 3)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-10, -3]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-10, -3)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (-10, -3)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(-3) - f(-10)}{-3 - (-10)} \Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{f(-3) - f(-10)}{7} \quad (1)$$

Ομοίως

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-3, 4]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-3, 4)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in (-3, 4)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(4) - f(-3)}{4 - (-3)} \Rightarrow f'(\xi_2) = \frac{f(4) - f(-3)}{7} \quad (2)$$

Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (-10, -3)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (-3, 4)$ τέτοια ώστε

$$\boxed{f'(\xi_1) + f'(\xi_2)} \stackrel{(1),(2)}{=} \frac{\cancel{f(-3)} - f(-10)}{7} + \frac{f(4) - \cancel{f(-3)}}{7} = \frac{f(4) - f(-10)}{2} \stackrel{f(-10)=f(4)}{=} \boxed{0}$$

21.4 4)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \gamma]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, γ)

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \gamma)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} \quad (1)$$

Ομοίως

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\gamma, \beta]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (γ, β)

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in (\gamma, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} \quad (2)$$

Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\alpha, \gamma)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (\gamma, \beta)$ τέτοια ώστε

$$\boxed{f'(\xi_1) + f'(\xi_2)} \stackrel{(1),(2)}{=} \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} + \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} \stackrel{\gamma - \alpha = \beta - \gamma}{=} \frac{\cancel{f(\gamma)} - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} + \frac{f(\beta) - \cancel{f(\gamma)}}{\gamma - \alpha} =$$

$$= \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} \stackrel{f(\alpha)=f(\beta)}{=} \boxed{0}$$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, 2)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \Rightarrow f'(\xi_1) = f(2) - f(1) \quad (1)$$

Ομοίως

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[2, 3]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(2, 3)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in (2, 3)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} \Rightarrow f'(\xi_2) = f(3) - f(2) \quad (2)$$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[3, 4]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(3, 4)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_3 \in (3, 4)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_3) = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} \Rightarrow f'(\xi_3) = f(4) - f(3) \quad (3)$$

Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (1, 2)$, ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (2, 3)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_3 \in (3, 4)$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \boxed{f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3)} &\stackrel{(1),(2),(3)}{=} \cancel{f(2)} - f(1) + \cancel{f(3)} - \cancel{f(2)} + f(4) - \cancel{f(3)} = \\ &= f(4) - f(1) \stackrel{f(4)=f(1)+2}{=} \cancel{f(1)} + 2 - \cancel{f(1)} = \boxed{2} \end{aligned}$$