

21.23

α) Επειδή τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά θα ισχύει

$$\lambda_{AB} = \lambda_{BG} = \lambda_{AG} \Rightarrow \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_G - y_B}{x_G - x_B} = \frac{y_G - y_A}{x_G - x_A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta} = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha}} \quad (1)$$

Έτσι

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β)

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Ακόμη

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\beta, \gamma]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (β, γ)

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$$

Έτσι τώρα έχουμε ότι

η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$

είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

και

$$\left. \begin{aligned} f'(\xi_1) &= \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \\ f'(\xi_2) &= \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta} \end{aligned} \right\} \xRightarrow{(1)} f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και επομένως υπάρχει $x_0 \in (\xi_1, \xi_2) \Rightarrow x_0 \in (\alpha, \gamma)$

τέτοιο ώστε $\boxed{f''(x_0) = 0}$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\beta, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$. Τότε

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο $[\beta, \gamma]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο (β, γ) ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = \frac{f'(x)(x - \alpha) - [f(x) - f(\alpha)]}{(x - \alpha)^2}$$

και

$$\left. \begin{aligned} h(\beta) &= \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \\ h(\gamma) &= \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} \end{aligned} \right\} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\beta, \gamma]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\beta, \gamma)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{f'(\xi)(\xi - \alpha) - [f(\xi) - f(\alpha)]}{(\xi - \alpha)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(\xi)(\xi - \alpha) - [f(\xi) - f(\alpha)] = 0 \Rightarrow f'(\xi)(\xi - \alpha) = f(\xi) - f(\alpha) \stackrel{\xi \in (\beta, \gamma) \Rightarrow \xi - \alpha \neq 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(\alpha)}{\xi - \alpha}}$$