

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \gamma]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, γ)

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \gamma)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} \stackrel{f(\alpha)=0}{\Rightarrow} f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma)}{\gamma - \alpha} \stackrel{f(\gamma)<0, \gamma-\alpha>0}{\Rightarrow} f'(\xi_1) < 0$$

Ακόμη

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\gamma, \beta]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (γ, β)

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in (\gamma, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} \stackrel{f(\beta)=0}{\Rightarrow} f'(\xi_2) = \frac{-f(\gamma)}{\beta - \gamma} \stackrel{f(\gamma)<0, \beta-\gamma>0}{\Rightarrow} f'(\xi_2) > 0$$

Τέλος η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, άρα προφανώς $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \stackrel{\substack{f'(\xi_2)>0 \\ f'(\xi_1)<0 \Rightarrow -f'(\xi_1)>0}}{\Rightarrow} \boxed{f''(\xi) > 0}$$