

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[α, β]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(α, β)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $ξ_1 ∈ (α, β)$, τέτοιο ώστε

$$f'(ξ_1) = \frac{f(β) - f(α)}{β - α} \stackrel{f(β)=0}{\Rightarrow} f'(ξ_1) = \frac{-f(α)}{β - α} \stackrel{f(α)>0, β-α>0}{\Rightarrow} f'(ξ_1) < 0$$

Ακόμη

Η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[ξ_1, β]$, αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο $(ξ_1, β)$, αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $ξ ∈ (ξ_1, β)$, άρα προφανώς $ξ ∈ (α, β)$ τέτοιο ώστε

$$f''(ξ) = \frac{f'(β) - f'(ξ_1)}{β - ξ_1} \stackrel{f'(β)=0}{\Rightarrow} f''(ξ) = \frac{-f'(ξ_1)}{β - ξ_1} \stackrel{f'(ξ_1)<0, β-ξ_1>0}{\Rightarrow} \boxed{f''(ξ) > 0}$$