

21.19

α) Η ευθεία AB έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

Επειδή η ευθεία AB είναι εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ θα ισχύει $f'(\alpha) = \lambda$

Επειδή η ευθεία AB είναι εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\beta, f(\beta))$ θα ισχύει $f'(\beta) = \lambda$

Ακόμη η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β)

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow f'(\xi) = \lambda$$

Η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[\alpha, \xi]$

είναι παραγωγίσιμη στο (α, ξ)

$$\left. \begin{array}{l} f'(\alpha) = \lambda \\ f'(\xi) = \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow f'(\alpha) = f'(\xi)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \xi]$ και επομένως υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \xi)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi_1) = 0$$

Ακόμη, η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[\xi, \beta]$

είναι παραγωγίσιμη στο (ξ, β)

$$\left. \begin{array}{l} f'(\xi) = \lambda \\ f'(\beta) = \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow f'(\xi) = f'(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi, \beta]$ και επομένως υπάρχει $\xi_2 \in (\xi, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi_2) = 0$$

Τέλος

Η συνάρτηση f''

είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$

είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , αφού η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} f''(\xi_1) = 0 \\ f''(\xi_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f''(\xi_1) = f''(\xi_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f'' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και επομένως υπάρχει $\rho \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f'''(\rho) = 0$ που σημαίνει ότι η εξίσωση $f'''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα

- β) Έστω ότι δεν υπάρχουν δύο σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3 - x^2 - \sin x$ στα οποία η εφαπτόμενη είναι η ευθεία AB. Τότε

με βάση το ερώτημα α) η εξίσωση $f'''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα άτοπο διότι

$$f(x) = x^3 - x^2 - \sin x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x + \eta \mu x \Rightarrow f''(x) = 6x - 2 + \sigma \nu \eta x \Rightarrow \\ \Rightarrow f'''(x) = 6 - \eta \mu x \quad \text{και προφανώς η } f''' \text{ δεν μηδενίζεται αφού } -1 \leq \eta \mu x \leq 1$$